ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك علوم تجريبية

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس المنطق

العبارات: نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا و نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز p أو q أو r ......

غالبا ما نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة عبارة : الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة و الرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة

العمليات على العبارات:

1)نفي عبارة: نرمز لنفي العبارة p بالرمز $\overline{p}$ وتكون $\overline{p}$ صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة

وجدول حقيقة عملية النفي هو : **الجدول 1**

2)عطف عبارتين: عطف عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \text{ و } q)$ والتي تكون صحيحة فقط ا إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا

و جدول حقيقة العطف المنطقي هو : **الجدول 2**

3)فصل عبارتين: فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \text{ أو } q)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان p و q خاطئتين معا

و جدول حقيقة الفصل المنطقي هو : **الجدول 3**

4)استلزام عبارتين : استلزام عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Rightarrow q)$ والتي تكون خاطئة فقط اذا كانت p صحيحة و q خاطئة

وجدول حقيقة الاستلزام المنطقي هو : **الجدول 4**

ملاحظات: العبارة: $(p \Rightarrow q)$ تقرأ : " p تستلزم q " أو " اذا كانت p فان q "

العبارة : $(q \Rightarrow p)$ تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $(p \Rightarrow q)$

للبرهان أن العبارة : $(p \Rightarrow q)$ صحيحة نفترض أن العبارة p صحيحة و نبين أن العبارة q صحيحة

نتيجة: العبارتان $(p \Rightarrow q)$ و q أو $\overline{p}$ متكافئتان

5)تكافؤ عبارتين: تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Leftrightarrow q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا. وجدول حقيقة الاستلزام المنطقي هو : **الجدول5**

العبارة : $(p \Leftrightarrow q)$ تقرأ : " p تكافئ q "

جدول5 هوحقيقة التكافؤ المنطقي

خاصية : العبارتان $(p \Leftrightarrow q)$ و $\left[(p \Rightarrow q) \text{ و } (q \Rightarrow p)\right]$ متكافئتان

الدالة العبارية: نسمي دالة عبارية كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E حيث تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E ونرمز عادة لدالة عبارية بالرمز $A(x)$ أو $B(x)$ أو $A(x;y)$

العبارات المكممة: انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ " ونقرأ : "مهما يكن x من E لدينا $A(x)$ "

وتكون العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق الخاصية $A(x)$.

خاصية : نفي العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ " هو العبارة " $\exists x \in E , \overline{A(x)}$ "

نفي العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " هو العبارة " $\forall x \in E , \overline{A(x)}$ "

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

الجدول 1

p	q	p و q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الجدول 2

p	q	p أو q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

الجدول 3

p	q	$(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

الجدول 4

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

الجدول 5

الاستدلالات الرياضية.

1)الاستدلال الاستنتاجي :

مثال : ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن : $2 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

الأجوبة :نفترض أن : $2 < x < 4$ ونبين أن : $\frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

لدينا : $2 < x < 4$ اذن : $2-1 < x-1 < 4-1$

اذن : $1 < x-1 < 3$ اذن : $\frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

ومنه : $2 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

2)الاستدلال بالمثال المضاد :

مثال : بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$p\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right); x + \frac{1}{x} \geq 2$ الجواب : نعتبر : $x = -2$

لدينا : $-2 + \frac{1}{-2} = -\frac{5}{2} < 2$ اذن : p خاطئة

3)الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

لكي نبرهن أن الاستلزام $(p \Rightarrow q)$ صحيح يكفي أن نبرهن أن الاستلزام المضاد للعكس $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ صحيح

مثال: ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$ بين أن: $x+y>1\Rightarrow y>\frac{1}{2}$ أو $x>\frac{1}{2}$

الجواب :نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}\Rightarrow x+y\le1$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}$ اذن : $x+y\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ اذن: $x+y\le1$

ومنه : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}\Rightarrow x+y\le1$ وبالتالي: $x+y>1\Rightarrow y>\frac{1}{2}$ أو $x>\frac{1}{2}$

4)الاستدلال بالتكافؤ:

يعتمد الاستدلال بالتكافؤ على القانون المنطقي التالي : إذا كان $(p\Leftrightarrow q)$ و $(q\Leftrightarrow r)$ فان: $(p\Leftrightarrow r)$

مثال: بين أن : $a+b\ge2\sqrt{ab}$ $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

الجواب :نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$$a+b\ge2\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge0\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}\ge0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge0$$

و هذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي : $a+b\ge2\sqrt{ab}$ $\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$

5)الاستدلال بفصل الحالات :

مثال: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات :حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):|3x-6|=1$

الجواب :ندرس اشارة : $3x-6$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت : $x\ge2$ فان : $3x-6\ge0$ ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$$\Leftrightarrow3x-6=1\Leftrightarrow3x=7\Leftrightarrow x=\frac{7}{3}\in S$$

الحالة 2: اذا كانت : $x\le2$ فان : $3x-6\le0$ ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$$\Leftrightarrow-(3x-6)=1\Leftrightarrow-3x+6=1\Leftrightarrow-3x=-5\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}\in S$$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\left\{\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right\}$

6)الاستدلال بالخلف :

لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

مثال: بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\forall x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}\ne1$

الجواب : نفترض أن : $\exists x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$

يعني $x^2-1=x^2+1$ يعني $-1=+1$ و هذا غير صحيح

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : $\forall x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}\ne1$

7)الاستدلال بالترجع

لتكن $p(n)$ عبارة مرتبطة بعدد صحيح طبيعي n

لكي نبرهن أن العبارة $p(n)$ صحيحة $\forall n\in\mathbb{N}$

نمر بثلاث مراحل :

- نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$
- نفترض أن العبارة صحيحة بالنسبة ل n
- نبين أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n+1$

مثال1: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\ge1+2n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0\ge1+2\times0$ أي : $1\ge1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^n\ge1+2n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن:

$3^{n+1}\ge1+2(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1}\ge2n+3$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$3^n\ge1+2n$ اذن : $3^n\times3\ge3\times(1+2n)$

يعني : $3^{n+1}\ge6n+3$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $6n+3\ge2n+1$ (يمكن حساب الفرق)

$$(6n+3)-(2n+1)=6n+3-2n-1=4n+2\ge0$$

لدينا اذن : $3^{n+1}\ge6n+3$ و $6n+3\ge2n+1$ ومنه: $3^{n+1}\ge2n+3$

مثال2: بين بالترجع أن : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$

الجواب : نمر بثلاث مراحل : **المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1=\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{1\times2}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$ ؟؟

لدينا : $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

اذن : $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$$1+2+3+...+n+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

لدينا اذن : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$

مثال3: 1)بين أن : $11^{n+1}-1=10\times11^n+11^n-1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2)بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: 11^n-1 مضاعف للعدد 10

الجواب: 1) $11^{n+1}-1=11\times11^n-1=(10+1)\times11^n-1=10\times11^n+11^n-1$

2) يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $11^0-1=1-1=0$ مضاعف للعدد 10

ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k\in\mathbb{N}/11^{n+1}-1=10k'$ ؟؟؟؟؟

نعلم حسب 1) $11^{n+1}-1=10\times11^n+11^n-1$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$

اذن: $11^{n+1}-1=10\times11^n+10k$

اذن: $11^{n+1}-1=10\left(11^n+k\right)=10k'$ مع $k'=11^n+k$

ومنه : $11^{n+1}-1$ مضاعف للعدد 10

وبالتالي: 11^n-1 مضاعف للعدد 10 $\forall n\in\mathbb{N}$