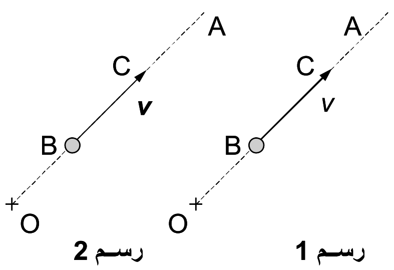
الملحق الأول

I المتَّجِهات VECTORS

المتَّجِه هو كينونةٌ رياضيةٌ تتَّسِم بخواصٍ عدديةٍ وهندسيةٍ على حدٍ سواء. وهو كميـــةٌ ذات مقـــدارٍ magnitude واتِّجـــاهٍ direction وخط عمل line of action. ويُمكِن تمثيل المُتَّجِه بخطٍ متَّجِه: هو عبارة عن سهم arrow، طولُه، بأية وَحْدَةٍ ملائمة، يكون بمثابة مقدار المتَّجِه، ويتحدد اتجاهه بموقع نقطة نهايته (رأس السهم) من نقطة الأصل، أما الخط الذي ينطبـــق عليه المتَّجِه، يتسامت معه collinear فهو خط عمله. وفي **الشـــكل 1.I** يمثل الخط OA خط عمل المتجه، كما تمثل القطعة الخطية BC (طوله) مقداره بينما يتمثل اتِّجاهُه بموقع نقطة النهاية C من نقطة الأصل B. وبالعادة يكـــون طـــول المتَّجِـــه اعتباطياً، باستثناء الحالات التي نستخدم فيها نظرية المتَّجِهات لحل بعض المسائل هندسياً.

ومن المهم المعرفة أنه، بالإضافة إلى الكينونة الرياضية التجريدية فإنّ التمثيل الهندسي للمتَّجِه يكاد يكون ضرورة، على عكس العدد الذي يأخذ تمثيله الهندسي طابع الطرافة. وسندعو التمثيل الهندسي للمُتَّجِه بالرسم السهماني أو السهمي arrow diagram. وفي العادة، ســـيرافق كـــلَّ مسألةٍ أو تمرينٍ في الميكانيكا الكلاسيكية، وحيثما يلزم ذلك، رسمٌ بياني يتخلله أسهماً، تعكس تموضع الكميات المتجهة في المسألة قيد البحـــث. ويُعتبر مُتَّجِه الموضع والسَّرْجَهَة والقوة والزَّخَم والزَّخَم الزَّاوِّي وغيرها كمياتٍ متجهة أو مُتَّجِهات.



شـــكل 1.I

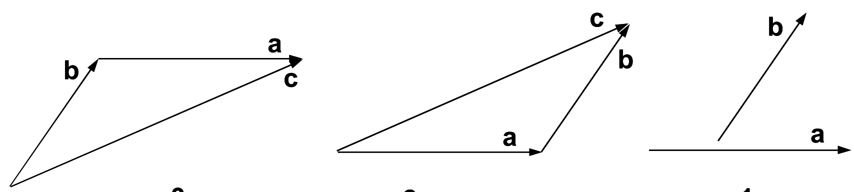
ويُمثل سهمٌ ما متَّجِهاً بنفس المعنى بالضبط، الذي تمثل بمقتضاه إزاحةٌ على امتداد المحور الحقيقي عدداً. وكما هو معروف ، يُستخدم في العمل المطبوع البنط الأسود الثخين **boldface type** اصطلاحاً، للإشارة إلى المتَّجِهَات. أمـــا فـــي العمـــل المكتوب باليد، فيرمز إلى المتَّجِه عادةً بسهمٍ يوضع فوق الحرف، مثلاً $\vec{r}$ ، من اليسار إلى اليمين وبعرض الحرف نفســـه. وفي الرسومات البيانية يُعرَّف المتَّجِه باسمه إمَّا عادياً، **شـــكل 1.1.I** أو بالبنط الأسود الثخين، **شـــكل 2.1.I** كمـــا يُرمَـــز لمقدار المتَّجِه بأيٍ من الصورتين، العادية r أو بين قضيبين رأسيين |**r**|، بينما يُرمَز للأعداد والكميات العددية بالبنط العادي normal type.

1.I جمع المتَّجِهات وطرحها Addition and Subtraction of Vectors

يمكن تمثيل عملية جمع متَّجِهَين كما في **الشـــكل 2.I** فبعد تحديد طوله واتِّجَاهِه، **رســـم 1**، يوضع السهم الممثـــل للمتَّجِـــهِ الأول **a** جِزافاً، بينما يوضع السهم الثاني **b** بحيث يقع ذيله عند رأس السهم الأول، **رســـم 2**، أو بالعكس، **رســـم 3**. حينئذ، يمثل السهم المرسوم من ذيل السهم الأول **a** إلى رأس السهم الثاني **b** مجموع السهمين الإتِّجَاهي (الهندسي). وجبرياً، يُكتب المجموع الإتِّجَاهي لمتجهين على الصورة

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{c} \qquad 1.\mathrm{I}$$

وينتج من المعادلة 1.I **الشـــكل 2.I** أن جمع المتَّجِهات تبادلي commutative.

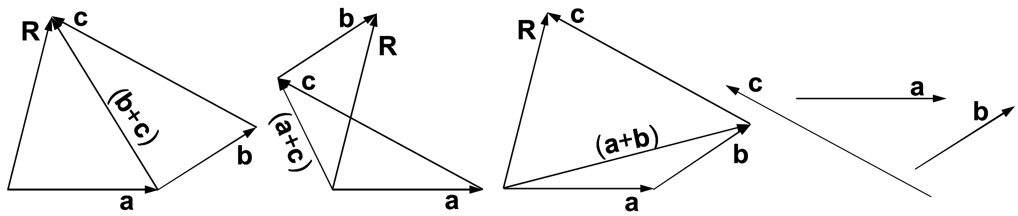


رسم 3   رسم 2   رسم 1

شكل 2.I

كما أن خاصية الترافق associative للجمع صحيحةٌ أيضاً للمتَّجِهات. ونُدَلِّل على خاصية الترافق هندسياً كما في **الشكل 3.I**. إذ بفضل تلك الخاصية يجوز حذف الأقواس عند جمع المُتَّجِهات، **رسم 1 – رسم 4**.

$$\mathbf{R = (a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c) = a + b + c} \qquad 2.I$$



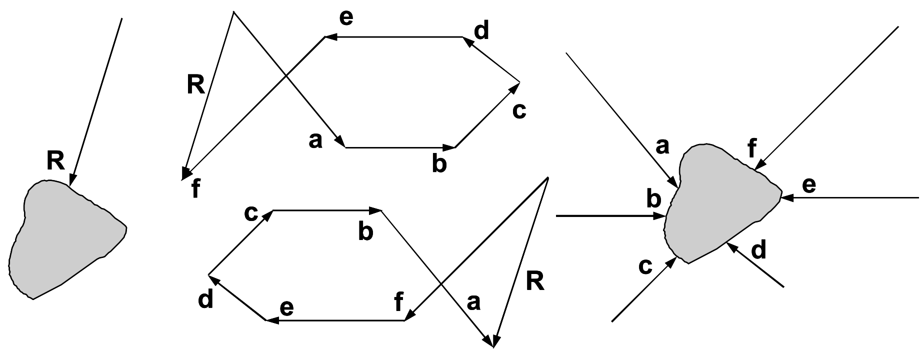
$\mathbf{R = a + (b + c)}$ $\mathbf{R = (a + c) + b}$ $\mathbf{R = (a + b) + c}$

رسم 4   رسم 3   رسم 2   رسم 1

شكل 3.I

كما يمكن أن يُوَسَّعَ الرسم التوضيحي السهماني ليشملَ جمع أي عددٍ من المتَّجِهَات، ممَّا يَنْتُج عنه محصلةً إجمالية تساوي المجموع الاتِّجَاهِي، والذي ندعوه المُتَّجِه الرئيسي general vector. مثلاً، إذا افترضنا أن جسماً ما يتعرض إلى تأثيرات عدة قوىً من اتِّجَاهَاتٍ مختلفة، **شكل 4.I**، فإن المُتَّجِه الرئيسي (لمحصلة القوى) يمثل جبرياً بالعلاقة

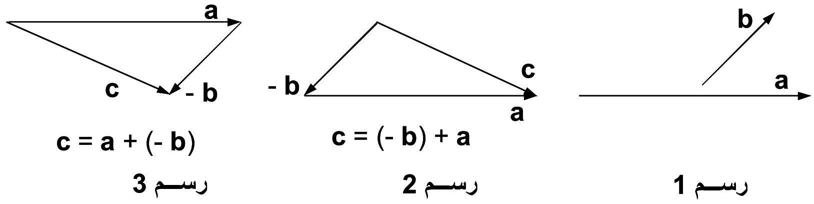
$$\mathbf{R = a + b + c + d + e + f + g} \qquad 3.I$$



رسم 3   رسم 2   رسم 1

شكل 4.I

من جهة أخرى؛ يُعرَّف طرح متَّجِهٍ من آخر، بأنَّه جمع سالب المتَّجِه إلى هذا الآخر. وندلِّل على طرح المتَّجِهَات بالرسم السَّهْمَاني، **شكل 5.I**، الذي يُمكن كتابته على الشكل



شكل 5.I

$$\mathbf{c} = (-\mathbf{b}) + \mathbf{a} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b} \qquad 4.I$$

2.I ضرب متَّجهٍ في كميَّة عددية

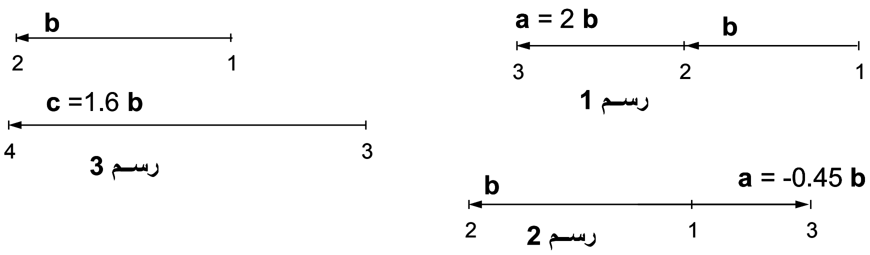
يعرف حاصل ضرب الكمية العددية k في المتَّجه **a** بأنه متجهٌ جديد مقدارُه $|k|\mathbf{a}$ ، واتَّجَاهُه مُوَازٍ للمتَّجه **a**، إذا كانت k موجبة، وموازٍ عكسياً antiparallel لنفس المتَّجِه **a**، إذا كانت k سالبةً. ويُمكن تصوير عملية الضرب هندسياً كعملية مطٍ أو انكماش للمتَّجِه بدون تغيير خط عمله، **شكل 6.I**. مثلاً، تعني المعادلة الاتِّجَاهِية

$$\mathbf{a} = 2\,\mathbf{b} \qquad 5.I$$

أن المتَّجِه **a** له مثلا مقدار المتَّجِه **b** واتِّجَاهه وخط عمله، **رسم 1**. كذلك، إذا ارتبط زوجٌ آخر من المتَّجِهَات بالعلاقة

$$\mathbf{a} = -0.45\,\mathbf{b} \qquad 6.I$$

فإن المتَّجِه **b** إذا ما تقلص إلى 45% من مقداره مع تغيير اتِّجَاهِه فقط، يعطي المتَّجِه **a**، **رسم 2**، **شكل 6.I**. أمّا المعادلة



شكل 6.I

$$\mathbf{c} = 1.6\,\mathbf{b} \qquad 7.I$$

فتعني أنَّ زيادة المتجه **b** بـــ 60% مقداراً مع ثبات اتِّجاهه تُعطي المتجِه **c**، **رسم 3**، **شكل 6.I**. وعلى نفس الغرار فإنّ المعادلة

$$\mathbf{a} = (-4)\,\mathbf{b} \qquad 1.8.I$$

لها نفس المدلول كالمعادلة

$$\mathbf{a} = 4\,(-\mathbf{b}) \qquad 2.8.I$$

فللمتَّجِه **a** أربعة أضعاف مقدار المتَّجِه **b**، كما أن اتِّجَاهَه مضادّ لاتجّاه المتَّجِه **b** وإن كان لهما خط العمل نفسه. ويمكن أن تأْتَلف عمليتا الجمع والضرب بواسطة كمية عددية فتعبرا عن قانون التوزيع distributive law لحساب المتَّجِهَات

$$\mathbf{C} = k\,\mathbf{c} = k\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\,\mathbf{a} + k\,\mathbf{b} \qquad 9.I$$

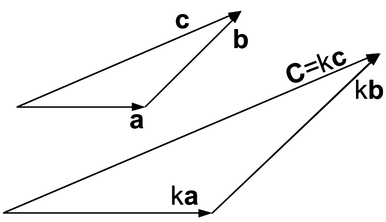
أي أن جمع متَّجِهَين، ومن ثم ضرب المجموع في كميةٍ عدديةٍ يعطي النتيجة نفسها مثل ضرب المتَّجِهَين كلّ على حدةٍ في الكمية العددية قبل جمعهما، شـــكل 7.I. كما يسري أيضاً قانون الترافق الضرّبي associative law of multiplication، الذي يُعبَّر عنه بالعلاقة

$$k(n\mathbf{a}) = (kn)\mathbf{a} \qquad 10.\mathrm{I}$$

وتُعَرِّف خاصيتا الترافق والتوزيع، إذا ما أُخذتا معاً، ما يُدعى بالخاصية الخطِّية للمتَّجِهَات linearity والتي يُعبَّر عنها بالمعادلة

$$k(n\mathbf{a} + m\mathbf{b}) = (kn)\mathbf{a} + (km)\mathbf{b} \qquad 11.\mathrm{I}$$

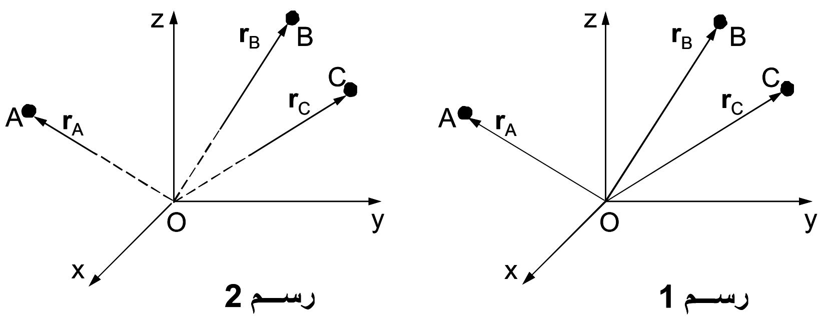
وإذا كانت الخواص الجبرية العامة للمتَّجِهَات التي عُبِّر عنها حتى الآن مطابقةً لخواص الأعداد، فلا يعني ذلك أن جميع القواعد المألوفة لجبر الأعداد يصلحُ أيضاً لجبر المتَّجِهَات.



شـــكل 7.I

3.I متَّجِه الموضع The Position Vector

أحد أهم الكميات المتَّجِهَة الفيزيائية الذي يـــحـــدد موضع جسيمٍ في المكان (موضع أية نقطةٍ، سواءً احتلها الجســـيم أم لا). ويكون مقداره هو المسافة بين نقطة التأثير ونقطة أصل مختارة جزافاً، بينما يُعَرف اتِّجَاهَه اتِّجَاه نقطةِ التـــأثير مـــن نقطـــة الأصل. ومن مميزات متَّجِه الموضع، أن لمقداره كما لاتِّجَاهِه مغزىً هندســـياً، بخلاف معظم الكميات المتَّجِهَة الأخرى، إذ يعتمد تعريفه على اختيار نُقطة الأصل. وأخيراً يُعتبر متَّجِهُ الموضع متَّجِهاً معيارياً تُعيِنُنا خواصهُ على تعريـــف متَّجِهَـــات أخرى. هذا، وإن رمزاً مألوفاً لمتَّجِه الموضع هو **r**.



شـــكل 8.I

وإنَّه لَعُرْفٌ شائعٌ، أن نرسم السهم التمثيلي لمتَّجِه موضعٍ من نقطة الأصل إلى النقطة المعينة. وغالباً ما يكون هذا ملائمـــاً، حيث يضمن الحصول على الاتجاه الصائب والطول النسبي للسهم. بيد أنَّه لمن المهم أن نتذكر أن السهم لا يُـــؤثر إلا علـــى نقطةٍ مفردة، وأن وضعه الفعلي في الرسم ليس مهماً. فمُتَّجِه الموضع لنقطةٍ مختلفٌ تماماً عن خطٍ يصل نقطة الأصل بالنقطة المعينة. وندلل في **الشـــكل** 8.I على مثالٍ آخر من متجهات الموضع. فيمكن تمثيل مواضع مجموعة الجسيمات المادية A، B و C بأيٍ من الشكلين المذكورين، بحيث نتعمد اختيار الأسهم في أحد الرسمين 2، أقصر من أبعاد نقطةِ الأصل عن النقاط A ، B و C، **رسم 1**.

1.3.I مُتَّجِهُ الوَحْدَة Unit vector

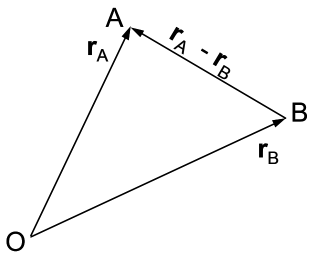
مُتَّجِهٌ، مقداره وَحْدَةٌ لا بُعدية واحدة يُؤثر بنفس خط عمل المتَّجِه. ورياضياً يتحدد متجه الوحدة كحاصل قسمة المتجـــه علـــى مقداره

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}}{U} \qquad 12.I$$

وبالعادة يُرمز لِمُتَّجهات الوحدة الديكارتية بالرموز $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ و $\boldsymbol{k}$ المعرفة للمحاور المتعامدة يمينياً x ، y و z بالترتيب، **شـــكل 2.10.I**. كما يرمز لمتجهات الوحدة القطبية بالرموز $\mathbf{e}_r$ للإحداثي القطبي **r** و $\mathbf{e}_\varphi$ للإحداثي المستعرض، الزاوية φ. وعلى المنوال نفسه، ندعو $\mathbf{e}_t$ و $\mathbf{e}_n$ متجهي الوحدة الطبيعيين للإحداثيين، المماسي t والعمودي n على الترتيب.

4.I متَّجِهُ الإزاحَة The Displacement Vector

يدعى الفرق بين متَّجِهَي موضعٍ متَّجِهُ إزاحة. وهذا هو متَّجِـــه موضـــعِ إحدى النقطتين نسبة إلى النقطة الأخرى، بدلاً من نقطة الأصل. وعلـــى ذلك، فإن $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$، هو متَّجِه موضع الجسيم A بالنسبة للجسيم B، **شـــكل 9.I**، الذي يُدعى أيضاً بالإزاحة من B إلى A. وكما يظهر في الشـــكل نفسه، يكون متَّجِه الإزاحة مستقلاً عن اختيار نقطة الأصل. وفي الفيزياء والميكانيكا بشكل خاص، تظهر متَّجِهات الإزاحة كالتغير فـــي موضـــع جسيم بين الزمنين t_1 و t_2. فنكتب



شـــكل 9.I

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) \qquad 13.I$$

كما يستعاض عن الرمز **r** بالرمز **S** عند الحركة المنحنية أو الدورانية.

5.I مُرَكِّبَات المُتَّجِهَات Components of Vectors

حتى نُعَرِّف متَّجِه الموضع، من الضروري أن نختار نقطةَ أصلٍ اعتباطية قد تقع عند أية نقطةٍ مناسبة. إذ يكـــون مناسباً إلى حدٍ بعيد عند دراسة المتَّجهات، رغم عدم ضرورته، اختيار فئةٍ اعتباطيةٍ من اتِّجَاهات الإسناد؛ كـــأن نختار الإحداثيات الديكارتية اليمينية المميزة بالمحاور x، y وz. فنعرف أي متَّجِهٍ كالمجموع الهندســـي لمتَّجِهَاتٍ موازيةٍ للمحاور

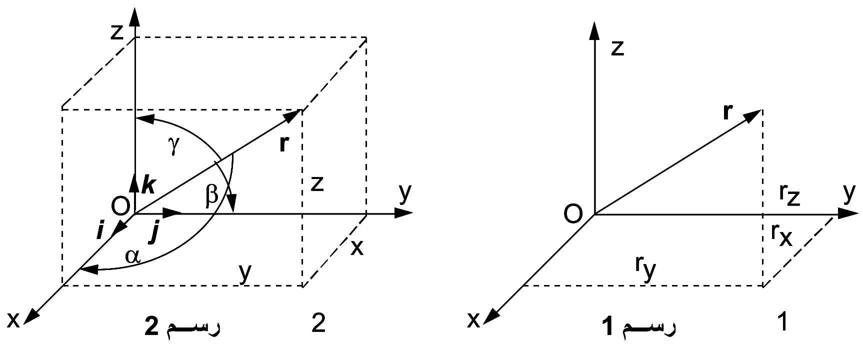
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_x + \mathbf{r}_y + \mathbf{r}_z \qquad 1.14.I$$

وهذه العملية، التي تُدعى تحليل resolution المتَّجِه إلى مُرَكِّبَاتِه، مُدَلَّلٌ عليها للمُتَّجِه **r** في رســم **1**، **شـــكل 10.I**، رسم1. وثمة تحليلٌ آخر يكون ملائماً أيضاً، تكتب بمقتضاه مركبة المتَّجِه كحاصل ضرب كميةٍ عدديةٍ وأخرى متَّجِهَةٍ طولها الوَحْدَة unit vectors. ومتَّجِهات الوَحْدَة، والمعروفة بالرموز $\boldsymbol{i}$، $\boldsymbol{j}$ و $\boldsymbol{k}$ الموازية للمحاور الديكارتية x، y و z على التوالي، مُبَيَّنَةٌ في رســم **2**، **شـــكل 10.I**. وعلى ذلك يمكن كتابة المتَّجِه **r** بدلالة متَّجِهات الوَحْدَة على الصورة

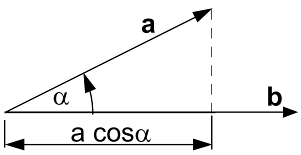
$$\mathbf{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} \qquad 2.14.I$$

وتدعى الكميات العددية x ، y و z بمركبات المتَّجِه **r** والتي قد تكون موجبة أو سالبة أو صفراً.

وهندسياً، فإنَّ مقدار مركبة المتَّجِه على محور ما، يساوي طول مسقط projection المتَّجِه على المحور المعين، **شكل 11.I**. ويمكن التعبير عن مسقط المتَّجِه كمقدارِهِ مضروباً في جيب تمام الزاوية المحصورة بين المتَّجِه والمحور



شكل 10.I



شكل 11.I

$$x = r_x = r \cos \angle(\mathbf{r}, \boldsymbol{i}) = r \cos \alpha$$
$$y = r_y = r \cos\angle(\mathbf{r}, \boldsymbol{j}) = r \cos \beta \qquad 15.I$$
$$z = r_z = r \cos\angle(\mathbf{r}, \boldsymbol{k}) = r \cos \gamma$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على **الشكل 10.I** نجد أن مقدار magnitude المتَّجِه **r** يكون

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad 16.I$$

I6.I. حاصل الضرب القياسي The Scalar Product

يعرف حاصل الضرب القياسي للمتجهين **a** و **b**، الذي يكتب **a·b**، بأنه حاصل ضرب مقداري المتجهين وجيب تمام الزاوية المحصورة بينهما

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a \cdot b \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \qquad 17.I$$

وبما أن أيَّاً من العوامل الثلاثة على اليمين لا يعتمد على اختيار الإحداثيات يكون حاصل الضرب هذا كميةً قياسيةً. أي أن مقداره لا يتغير بتغير الإحداثيات. والائتلاف $a \cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a \cos \alpha$ هو مركِّبَة المتَّجِه **a** على امتداد المتَّجِه **b**، الذي يُدعى المركبة العمودية $a_\perp$، $a_\perp = a \cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a \cos \alpha$، أو بشكلٍ مختصر مُرَكَّبَة **a** على (امتداد) **b**، انظر **الشـكل 11.I**. ولذلك نكتب

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_\perp \cdot b = a \cdot b_\perp \qquad 18.I$$

حيث إن $b_\perp$ مركبة **b** على **a**. وواضحٌ من التعريف، والمعادلتين الأخيرتين 17.I و 18.I أن حاصل الضرب القياسي تبادلي

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \qquad 19.I$$

ولذلك، فحاصل الضرب القياسي لمتَّجِهٍ في نفسه هو مربع مقداره

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \qquad 20.I$$

كما أن حاصل الضرب القياسي لمتجه الوحدة في نفسه يساوي الوحدة

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1 \quad \& \quad \mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{e}_\varphi = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\text{etc.} \qquad 21.\text{I}$$

بينما يكون حاصل الضرب القياسي لمتجَّهين متعامدين صفراً. فباستبدال $\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \cos 90° = 0$ في المعادلة 17.I، ينتج أن

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0 \quad \mathbf{e}_t\cdot\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\varphi = 0 \ \ldots\ldots\text{etc} \qquad 22.\text{I}$$

ونستطيع أن نستغل الخاصيتين الأخيرتين بغية التعبير عن حاصل الضرب القياسي بدلالة المركبات، فنكتب

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \qquad 23.\text{I}$$

والذي يمكن فكه وفق القواعد الجبرية المعتادة

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad 24.\text{I}$$

وأخيراً، يتَّسِم حاصل الضرب القياسي بالخاصية الخطية المعبر عنها بالعلاقة

$$\mathbf{c}\cdot(n\,\mathbf{a} + m\,\mathbf{b}) = n\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} + m\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{b} \qquad 25.\text{I}$$

وكتطبيقٍ مباشر على حاصل الضرب القياسي لمتَّجِهَين، يمدنا تعريف الشغل بمثالٍ بسيط عليه

$$dA = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

أي أن متجه القوة **F** مضروباً في متجه الإزاحة **dS** يعطي الشغل.

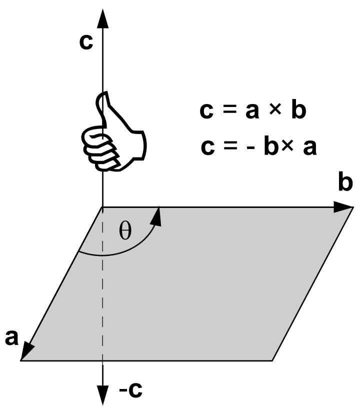
7.I حاصل الضرب الاتجاهي The Vector Product [1]

يعرف حاصل الضرب الاتجاهي للمتَّجهين **a** و **b** الذي يكتب $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، بأنَّه متَّجِهٌ متعامدٌ على المستوى الذي يحوي المتَّجِهين الأوَّلين. وتحدد قاعدة اليد اليمنى اتجاه المتَّجِهِ **c** المتعامد مع كلٍ من **a** و **b**، **شـكل 12.I**. فإذا ما اتَّجَهت أصابع اليد اليمنى على امتداد **a** ثمّ قُوِّست باتجاه **b** (عبر الزاوية الصغرى بين **a** و **b**) فإن إبهام اليد اليمنى يشير إلى اتجاه **c**

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} \qquad 26.\text{I}$$

كما يتحدد مقدار المتَّجِه **c** بحاصل ضرب مقداري المتَّجهين **a** و **b**، مضروباً بجيب الزاوية المحصورة بينهما

$$c = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = a\,b\sin\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a\,b\sin\varphi \qquad 27.\text{I}$$



شـكل 12.I

حيث φ الزاوية الصغرى المحصورة بين المتَّجهين **a** و **b**، **شـكل 12.I**. واستناداً إلى التعريف، فإن حاصل الضرب الاتجاهي لمتَّجهين متوازيين هو صفر. كما أن الزاوية φ المحدد مقدارها بين الصفر و °180 تعطي الصيغة 27.I، والمعادلة 26.I بالتحديد، مقداراً موجباً أو صفراً للمتَّجِه **c**. وهندسياً يمكن التعبير عن حاصل ضرب المتَّجهين بالمُحَدَّدَة determinant

[1] يسمى أيضاً بحاصل الضرب التصالبي cross product، نسبةً إلى شارة الصليب ×، كما يدعى حاصل الضرب القياسي بالنقطي dot product.

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad 28.\text{I}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\, \boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\, \boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\, \boldsymbol{k}$$

ويتَّسِم حاصل الضرب الاتجاهي بالخاصية الخطية أيضاً

$$\mathbf{c} \times (n\,\mathbf{a} + m\,\mathbf{b}) = n\, \mathbf{c}\times\mathbf{a} + m\, \mathbf{c}\times \mathrm{b} \qquad 29.\text{I}$$

إلا أنَّه ليس تبادلياً anti commutative

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} \neq \mathbf{b}\times\mathbf{a} \quad \& \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\,\mathbf{b}\times\mathbf{a} \qquad 30.\text{I}$$

بناءً على ما ورد أعلاه، يكون حاصل الضرب الاتجاهي لمتَّجِهي وَحْدةٍ متعامدين متَّجِهَ الوحْدة الثالث بالترتيب ، إذ أن $\sin 90° = 1$، في المعادلة 26.I. ونستنتج من **الشـــكلين 10.I** أن

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \qquad 31.\text{I}$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}$$

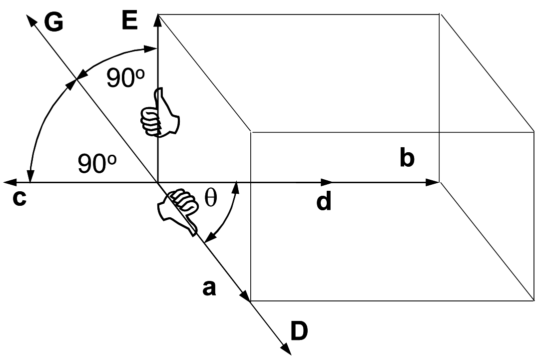
كما أن حاصل الضرب الاتجاهي لمتَّجِهٍ في نفسه هو صفرٌ. وعليه نكتب

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0 \qquad 32.\text{I}$$

وتعتبر كلٌ من السرجهة والتسارع والعزم الدوراني والزخم الزاوي أمثلةً على حاصل الضرب الاتِّجاهي. فالسرجهة $\boldsymbol{v} = \omega \times \mathbf{r}$، والتسارع $\mathbf{a} = \omega \times \boldsymbol{v}$ والعزم الدوراني $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ والزخم الزاوي $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\boldsymbol{v}$.

8.I حاصل الضرب الثلاثي Triple Product

يعرف حاصل الضرب الثلاثي بأنه حاصل ضرب متَّجِهٍ في حاصل ضرب متَّجِهين آخرين. ويُنْعَت هذا الحاصل بالاتجاهي، إذا كان الناتج متجهاً $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ أو $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$، **شـــكل 13.I**، وبالقياسي إذا كان الناتج كميةً قياسيةً $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ أو $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. وسنورد العلاقات الرياضية التالية دون برهان



$$\mathbf{E} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{c}\times\mathbf{E} = \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\therefore\ \mathbf{D} = -\,\mathbf{G}$$

شـــكل 13.I

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \qquad 33.\text{I}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

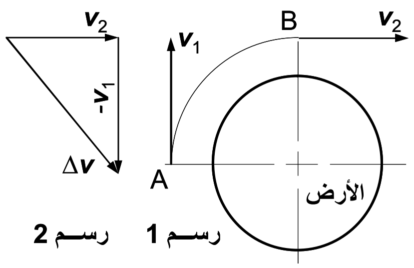
ويتلاشى حاصل الضرب الثلاثي $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ إذا كان إثنان من المتجهات الثلاثة متوازيين، أو أن أحدهم يوازي المتَّجِهِ الناتج كحاصل ضرب المتَّجهين المتبقيين.

9.I المتَّجِهات المتغيرة مع الزمن، المشتقة The Derivative

كما أوضحنا سابقاً عند تعريفنا لمتَّجِه الإزاحة عند اللحظتين t_1 وt_2، فإن المتَّجِه $\mathbf{r}(t)$ يرمز إلى متَّجِهِ موضع جسيم في اللحظة الزمنية t. فإذا رمزنا إلى متَّجِهِ موضع مركبةٍ فضائيةٍ تدور حول الأرض، الذي هو دالة زمنية $\mathbf{r}(t)$، **شكل 14.I**، فإن تعريفَ متَّجِهِ إزاحة المركبة (تغيُّر الموضع) بين اللحظتين t_1 و t_2، في المعادلة 13.I، هو تعريفٌ ينطوي فقط على طرح متَّجِهٍ من آخر. حاصل قسمة متَّجِهِ الإزاحة بين اللحظتين t_1 و t_2 على الفترة الزمنية Δt، $\Delta t = t_2 - t_1$، يُعَرِّفُ السرجهة المتوسطة

$$\boldsymbol{v}_{\text{ave}} = \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad 34.\text{I}$$

وحتى تكون السرجهة المتوسطة مقياساً دقيقاً لحركة الجسم، فلا تعتمد على الفترة الزمنية بل على اللحظة الزمنية المعينة، من الضروري تعريف المفهوم الرياضي لمشتقة متَّجِه الموضع، أو السرجهة (اللحظية). وتُعرف السرجهة بأنها نهاية السرجهة المتوسطة عند الزمن t_1، إذا ما وجدت هذه النهاية، عندما تؤول الفترة الزمنية Δt للصفر. أو رياضياً



شكل 14.I

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

أو بشكلٍ مختصر السرجهة تكافئ مشتقة متَّجِه الموضع

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad 35.\text{I}$$

وعلى نفس المنوال (متَّجِه) التسارع يكافئ مشتقة السرجهة

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad 36.\text{I}$$

حيث تمثل المعادلتان الأخيرتان 35.I و36.I الأساس لكينماتيكا المتجهات.

وبما أن المتَّجِه موسوم بمقدارٍ واتِّجاه، فإن تغيراً في أيٍ من هاتين الخاصيتين(أو في كلتيهما) يشكل تغيراً في المتَّجِه. وأبسط تَغَيُّر، ذلك الذي يحدث في المقدار فحسب. فسيارة سباق على مسارٍ أفقي، قد تغير من سرعتها دون تغيير اتجاهها. والمركبة الفضائية، **رسم** 1 في **شكل 14.I**، المتحركة في المدار الدائري حول الأرض بسرعةٍ ثابتةٍ ومقدارها $v = 18[\text{km/s}]$، تُغَيِّر سرجهتها من $\boldsymbol{v}_1$ شمالاً في النقطة A، إلى $\boldsymbol{v}_2$ شرقاً في نقطة B بدون تغيير مقدار السرعة. وتبعاً لذلك، يُحسب مقدار التغير في السرجهة

$$|\Delta \boldsymbol{v}| = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 + (-\boldsymbol{v}_1) = |\boldsymbol{v}\sqrt{2}| = 18\sqrt{2}\ \text{[km/s]}$$

كما يميل اتجاهه (التغير) بالزاوية 45° إلى الجنوب الشرقي، رسم 2 في **الشـــكل 14.I**.

10.I تفاضل وتكامل المتَّجَهات Vector Calculus

نلخص هنا أهم الصيغ لتفاضل وتكامل المتَّجِهات، التي منها المشتقات بالنسبة للزمن t. هذه الصيغ تصلح للتفاضل بالنسبة إلى أية متغيرات عددية أخرى. وكما هو معروف من الرياضيات فالتفاضل عملية خطية، يُعبر عنها بالمعادلة

$$\frac{d}{dt}(n\mathbf{a} + m\mathbf{b}) = n\frac{d\mathbf{a}}{dt} + m\frac{d\mathbf{b}}{dt} \qquad 37.I$$

حيث n وm، ثابتان عدديان. كما تتحدد مشتقة حاصل ضرب كمية عددية وكمية متجه بالعلاقة

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{a}) = f\frac{d\mathbf{a}}{dt} \qquad 38.I$$

والتي تشبه تماماً الصيغة المناظرة لمشتقة حاصل ضرب كميتين، إحداهما عددية والأخرى دالة. ولحاصلي الضرب القياسي والاتجّاهي - على حدٍ سواء - قواعد بسيطة للتفاضل، منها العلاقتان

$$\frac{d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt} \qquad 39.I$$

$$\frac{d(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt} \qquad 40.I$$

حيث يكون ترتيب العوامل مهماً في المعادلة الأخيرة فقط.

11.I التدرج The Gradient

إذا كانت الدالة، $f = f(x,y,z) = 0$، متصلة وتفاضلية عند كل نقطة، فإن تدرج هذه الدالة f، يكتب **grad** f ويعرف رياضياً

$$\mathbf{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad 41.I$$

والذي يمثل هندسياً المتجه الذي يشير لاتجاه أكبر معدل زيادة في الدالة في تلك النقطة. وبصيغة أخرى

$$\mathbf{grad}\ f \equiv \frac{df}{dn}\ \mathbf{e}_n \qquad 42.I$$

حيث $\mathbf{e}_n$ مُتّجِهُ وَحْدَةٍ عمودي على السطح $f(x,y,z) = 0$، يُوَضّح الإتجاه الذي يكون فيه $df > 0$. أمَّا $\frac{df}{dn}$ فهو المشتـــقة العمودية لدالة السطح f. كما يرمز للتَدَرُّجَ بالرمز ∇f

$$\mathbf{grad}\ f = \nabla f \qquad 43.I$$

التي تقرأ del (دِلْ) أو nabla (نَابْلَه) حيث تمثل رياضياً تفاضل الدالة

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad 44.I$$