ستاتيكا

الإجهادات والانفعالات

الفصل السابع : الإجهادات والانفعالات

الـــــجـــدارة:

معرفة تعبيرات الخواص الهندسيّة لمساحات المقاطع الشائعة الإستخدام،

معرفة أنواع الانفعالات والإجهادات (Strains & stresses)الناتجة عن القوى الدّاخليّة.

معرفة العلاقة الرياضية بين الإجهاد والانفعال في المدى المرن وحساب قيمها ،

وحساب قيمة الإجهادات القصوى في الكمرات الناتجة عن عزوم الانحناء.

الأهــــــداف:

عندما تكتمل هذه الوحدة يكون لديك القدرة على:

- معرفة أنواع الانفعالات والإجهادات الناتجة عن القوى الداخليّة
- العلا قة بين الانفعال والإجهاد المحوري وحساب قيمهما
- حساب الانفعال والإجهاد الناتج عن قوة القصّ
- حساب الإجهادات الناتجة عن عزم الانحناء عند مقطع محدّد من الكمرة
- حساب الإجهادات القصوى في الكمرات.

<u>مستوى الأداء المطلوب : أن يصل المتدرّب إلى إتقان هذه الجدارة بنسبة ١٠٠٪.</u>

<u>الوقت المتوقع للفصل: ٨ ساعات</u>

الـوسائل المساعـدة :

- <u>آلة حاسبة</u>
- <u>مساطر من البلاستيك وأخرى من الخشب، ذات مقاطع مختلفة الأشكال، لإجراء عليها تجارب توضّح مدى تأثير نوع المادّة والأحمال والخواص الهندسيّة على مقاومة العناصر الإنشائيّة.</u>

متطلبات الجــدارة:

معرفة ما سبق دراسته في الرياضيات الأساسيّة والتخصّصيّة وإتقان ما سبق دراسته في جميع الفصول السابقة من هذه الحقيبة التدريبيّة.

الفصل السـابـع : الإجهادات والانفعالات

٧ - ١- الخواص الهندسيّة للمقاطع:

٧- ١- ١- مـقـدّمـة:

تعتمد مقاومة أي عنصر إنشائي على ثلاثة عوامل أساسيّة وهي:

- مقاومة الـمـادّة المصنوع منها العضو،
- الأحمال المؤثّرة على العنصر الإنشائي،
- بعض الخواص الهندسيّة (geometric properties) لمقطع العنصر الإنشائي التي تعتمد على أبعاده وشكله.

ويظهر تأثير هذه العوامل الثلاثة واضحا بإجراء الثلاثة تجارب البسيطة التالية:

١- عندما يعرّض عضوان متماثلان من حيث الأبعاد، الأوّل من الصلب (steel) والثاني من البلاستيك إلى قوى شدّ، فإن العضو الذي من الصلب يتحمّل شدًا أكبر نسبيًا قبل أن ينكسر.

٢- عندما تتعرّض مسطرتان من البلاستيك، ومتماثلان من حيث الأبعاد، إلى حالتين مختلفتين من التحميل، كمحاولة كسرهما بشدّ الأولى وثني (bending) الثانية، فسيظهر إختلاف مقاومة المسطرتين للكسر.

٣- عند محاولة كسر مسطرتين من البلاستيك ذوى مقطعين مختلفين بثنيهما، سيظهر جليًا الفارق في مقاومة المسطرتين للكسر.

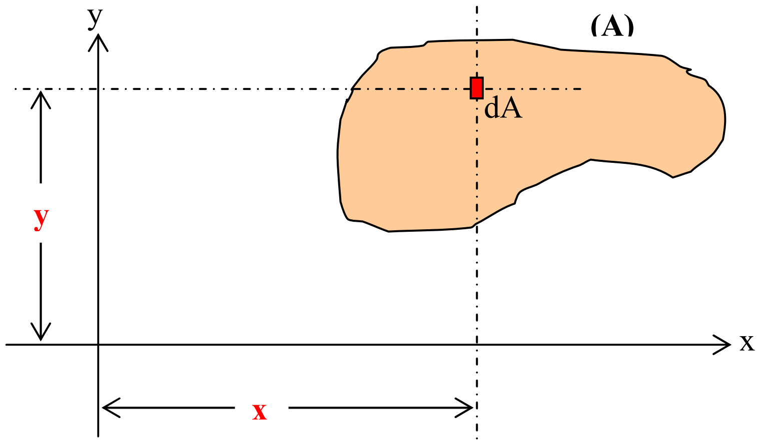
من بين الخواص الهندسيّة للمقاطع التي قد يتطلّب الأمر تحديدها في مسائل مقاومة المنشآت ما يلي:

- مساحة المقطع (cross-section´s Area)،
- موضع مركز المقطع (Centroid)،
- عزم القصور الذاتي (moment of Inertia) أو العزم الثاني لمساحة المقطع،
- عزم القصور المشترك (Product of Inertia)،
- نصف قطر القصور (radius of gyration).

مساحة المقطع وموقع مركز المقطع لا يحتاجان إلى مزيد من الدراسة إذ يمكن حسابهما بسهولة لمعظم الأشكال.

٧- ١- ٢- عـزم القـصـور الـذاتـي (moment of Inertia):

عزم القصور الذّاتي، أو العزم الثاني، لعنصر المساحة (مساحة صغيرة) بالنسبة لأي محور(axis) هو حاصل ضرب مساحة العنصر dA ومربّع المسافـة بين مركـزه والمحور(الشـكل (٧- ١)). ومجموع عزوم القصور الذاتي لكافّة عناصر المساحة هو عزم القصور الذّاتي للمساحة (A). يرمز لهذه الخاصّة غالبا بالحرف I .



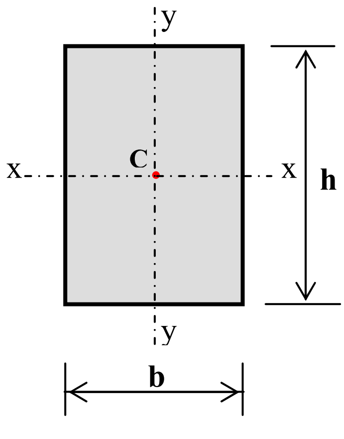
شـكـل (٧ – ١)

لعزم القصور الذاتي أهميّة خاصّة في المسائل التّي تتعلّق بانحناء الكمرات.

إنّ على المتدرّب فهم وحفظ تعبيرات عزم القصور الذاتي للمقاطع الشائعة الإستعمال والمعطاة في الملحق A : الخواص الهندسيّة للمقاطع المستوية الشائعة.

مـثـال ٧- ١:

تعبيرات عزم القصور الذّاتي لمساحة المقطع المستطيل المبيّن في الشكل (٧- ٢) حول المحورين المركزين: الأفقي x-x و الرأسي y-y.



شـكـل (٧ - ٢)

ـ عزم القصور الذّاتي حول المحورالمركزي الأفقي x-x :

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

ـ عزم القصور الذّاتي حول المحور المركزي الرأسي y-y :

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

يلاحظ من خلال التعبيرات السابقة أنّ وحدة عزم القصور الذاتي للمساحة هي وحدة الطول مرفوعا إلى الدرجة الرابعة: m^4 أو cm^4 أو mm^4. كما يلاحظ أنّ عزم القصور الذاتي يكون موجبا دائما.

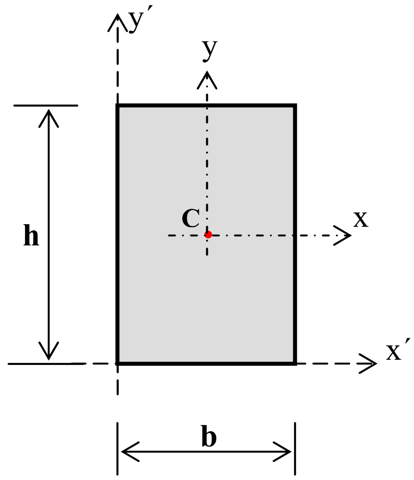
٧- ١- ٢- عـزم القصـور المشـترك (Product of Inertia):

يعرّف عزم القصور المشترك dI_{xy} ، لعنصر المساحة dA (مساحة صغيرة) بالنسبة لمحورين متعامدين x و y بأنّه حاصل ضرب مساحة العنصر وإحداثيي مركزه بالنسبة للمحورين المذكورين.

ومجموع عزوم القصور المشتركة لكافّة عناصر مساحة المقطع هو عزم القصور المشترك للمقطع، ويرمز له غالبا بالحرف I_{xy}.

مـــثـــال ٧- ٢:

عزم القصور المشترك لمساحة المقطع المستطيل المبيّن في الشكل (٧- ٣) :



شـكـل (٧ – ٣)

أ) حول المحورين المركزين x و y:

$$I_{xy} = 0$$

ملاحظة: عزم القصور المشترك لمساحة مقطع بالنسبة لمحورين متعامدين يساوي صفرا إذا كان أحد هذين المحورين أو كلاهما محور تماثل.

ب) حول المحورين ´x و ´y:

$$I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{4}$$

وعليه يلاحظ أن وحدة عزم القصور المشترك للمساحة هي وحدة الطول مرفوعا إلى الدرجة الرابعة، أي m^4 أو cm^4 أو mm^4.

كما تجدر الملاحظة إلى أنّ عزم القصور المشترك قد يكون موجبا أو سالبا، إذ قد يكون حاصل ضرب الإحداثيين x و y موجبا أو سالبا حسب إشارتيهما.

٧- ١- ٣- نصف قطر القصور (radius of gyration):

يعرّف نصف قطر القصور لمساحة (يرمز له غالبا بالحرف r) بالنسبة لمحور معيّن بأنّه الطول الذّي إذا ربّع وضرب بالمساحة يعطي عزم القصور الذّاتي للمساحة A بالنسبة للمحور المذكور. ويمكن تمثيل هذا التعريف رياضيّا كما يلي:

$$I = Ar^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

حيث r_x : نصف قطر القصور بالنسبة للمحور x.

و r_y : نصف قطر القصور بالنسبة للمحور y.

وحدة نصف قطر القصور هي وحدة الطول ، أي mm، cm ، m .
لنصف قطر القصور أهميّة خاصّة في المسائل الّتي تتعلّق بانبعاج الأعمدة (buckling of columns).

مـثـال ٧- ٣:

نصف قطر القصور لمساحة المقطع المستطيل المبيّن في الشكل (٧- ٣):

أ- حول المحور المركزي الأفقي x .

بما أنّ $I_x = bh^3/12$ وبالتالي:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} = \frac{h}{6}\sqrt{3}$$

ب - حول المحور المركزي الرأسي y :

بما أنّ $I_y = hb^3/12$ وعليه:

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{hb^3}{12}}{bh}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{b}{6}\sqrt{3}$$

٧-٢- الانفعـال والإجـهـاد (strain and stress):

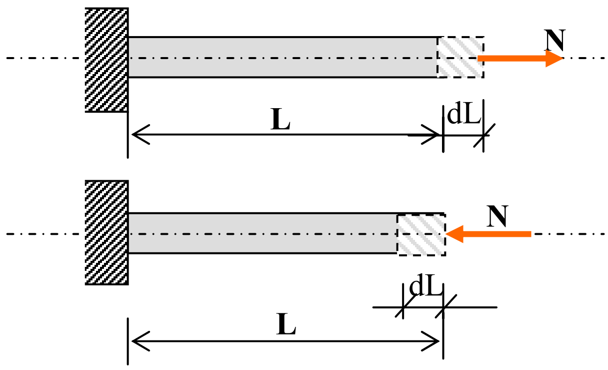
نتيجة لتأثير القوى الخارجيّة على عنصر إنشائي (كمرة، عمود، وغيرها) تتولّد إجهادات (stresses) وانفعالات (strains) داخليّة تكون إمّا في حالة شدّ أو ضغط على الألياف الدّاخليّة لمقاطع العنصر الإنشائي. عموما تتغيّر الإجهادات من نقطة (أو ليفة) إلى أخرى على المقطع، ولكن في بعض حالات التحميل البسيطة تكون الإجهادات موزّعة بانتظام على مساحة المقطع أو يفترض أنّها كذلك. وستقتصر الدّراسة في هذا الفصل على هذه الحالات البسيطة.

٧- ٢ - ١ –الانـفـعـال المـحوري:

إذا تعرّض قضيب (bar) لشدّ عند طرفيه فإنّه يـتـمـدّد، أي طـولـه يزداد زيادة طـفيفة، كـما في الشكـل (٧ – ٤). بالمثل، إذا تعرّض قضيب لضغط فإنّه يتقلّص (يقلّ طوله بمقدار صغير عن طوله الأصلي): وفي كلتا الحالتين يمكن قياس التغيّر في الطول.

إنّ الـنّـسـبة بين التغيّر في طول معيّن إلى الطول الأصلي تكون ثابتة بالنسبة لجميع أجزاء القضيب، وتسمّـى هذه النسبة : الانفعال المحوري(axial strain).

وقد يـكون الانفعال المحوري تمدّدا (استطالة) أو انـكماشا (تقلّصـا) تبعا للقوّة المؤثّرة على القضيب.



شـــكـل (٧ – ٤)

ويمـكن التعبير عن الانفعال الـمحوري، الذي يرمز له بالحرف الإغريقي ε (إبسلن) كما يلي:

$$\varepsilon = \frac{dL}{L} \qquad (٤/٧)$$

حيث L : الطول الأصلي للقضيب،

dL : التغيّر في طول القضيب تحت تأثير القوّة المحوريّة N .

وبما أنّ الانفعال المحوري يمثّل النسبة بين التغير في الطول والطول الأصلي فهو كميّة عديمة الأبعاد (بدون وحدة).

مـثــال ٧ – ٤ :

يتعرّض قضيب طوله 2m إلي شدّ محوري نتج عنه استطالة مقدارها 2mm . احسب الانفعال المحوري للقضيب.

الـحــل :

طول القضيب الأصلي : $L = 2m = 2000\ mm$

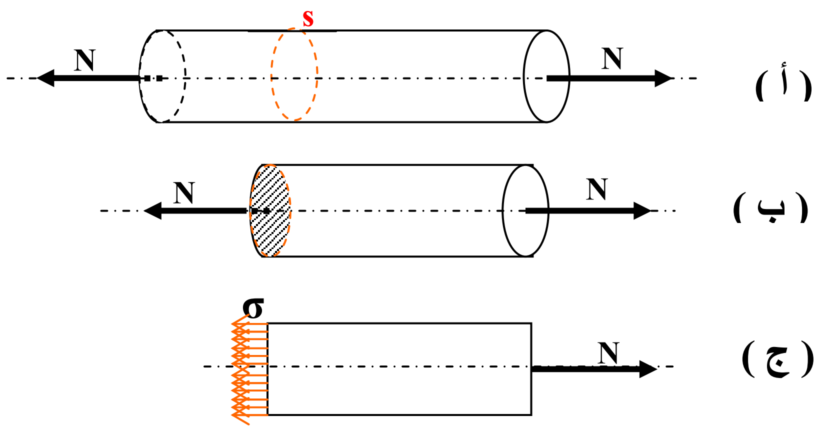
التغيّر في طول القضيب ، أو الإستطالة : $dL = 2\ mm$

الانفعال المحوري : $\varepsilon = dL/L = 2/2000 = 1/1000$

$$\varepsilon = 0.1\%$$

٧- ٢ – ٢ – الإجـهـاد الـنـاتـج عن القوّة المحوريّة :

الشكل (٧- ٥- أ) يوضح قضيب من الصلب مقطعه دائري ومساحته A ، وهو معرّضا لقوّة شدّ مركزي مقدارها N في اتجاه المحور. وعلى افتراض أنّ الـقضيب قد فصل إلى جزأين بمقطع خيالي s .



شــكــل (٧- ٥)

وبما أن القضيب متّزن، فيجب أن يكون كل من جزئيه متّزنا. وحتّى يتمّ ذلك، يجب أن تستحدث قوّة شدّ داخليّة مركزيّة معاكسة في الاتجاه ومساوية في المقدار للقوّة N كما في الشكل (٧- ٥- ب).

حيث N هي محصّلة الإجهادات، يرمز لها عادة بحرف σ ، العموديّة على المقطع. وحتّى تمر هذه المحصّلة بالمركز حسب متطلّبات الاتّزان، يجب أن تكون الإجهادات موزّعة بانتظام على مساحة المقطع كما هو مبيّن في شكل (٧- ٥- ج). وعليه فإن قيمة هذه الإجهادات σ تعطى كما يلي :

$$\sigma = +\frac{N}{A} \qquad (٢/٧)$$

حيث N : القوّة المحوريّة المؤثّرة على المقطع،

A : مساحة المقطع،

وتشير الإشارة الموجبة إلى إجهاد شـدّ.

أما إذا تعرّض القضيب في شكل (٧- ٥- أ) إلى قوّة ضغط محوري، تظلّ قيمة الإجهاد عند أي مقطع كما هي عليه في المعادلة (٢/٧) وينعكس اتجاهه، أي:

$$\sigma = -\frac{N}{A} \qquad (٣/٧)$$

حيث تشير الإشارة السـالبة إلى إجهـاد ضـغـط.

من التعريف، يتّضح أن الإجهاد هو قوّة مقسومة على مساحة، وبالتالي فوحدة الإجهاد في النظام العالمي للوحدات هي : N/m^2 والتي تسمّى باسكال (Pascal) وتكتب إختصارا Pa . ونظرا لأن هذه الوحدة صغيرة جدّا، فتستخدم غالبا مكرّراتها العشريّة:

الكيلو باسكـال: $kPa = 10^3$ Pa

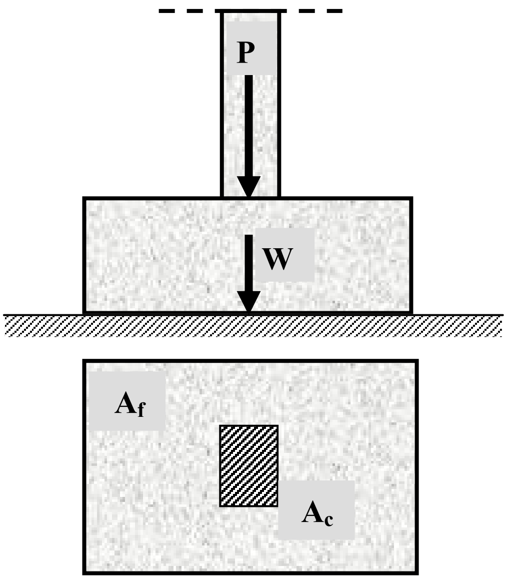
الميجا باسكال: $MPa = 10^6$ Pa

القيقا باسكال: $GPa = 10^9$ Pa

كمـا أنّ : $1\ MPa = 1\ N/mm^2$

ملاحظة ١ : جرت العادة على الاستغناء عن الإشارة (+ -) في المعادلتين (٢/٧) و (٣/٧) مع توضيح نوع الإجهاد: إجهاد شدّ أو إجهاد ضغط.

ملاحظة ٢ : إذا ارتكز جسم على آخر لهما نفس المحور، وكانت القوّة المؤثّرة رأسيّة على سطح الإتّصال بين الجسمين، ينتج إجهاد محوري على هذا السطح فيسمّى في هذه الحالة : إجهاد تحميل (bearing stress). ويمكن حساب هذا الإجهاد أيضا من المعادلة (٢/٧). كما هو حال عمود يرتكز على قاعدة كما في الشكل (٧ – ٦).



شكل (٧ – ٦)

عند سطح الإتصال بين العمود والقاعدة، يكون إجهاد التحميل:

$$\sigma = -\frac{P}{A_c}$$

حيث P حمل العمود و A_c مساحة مقطعه.

وعند سطح الإتصال بين قاعدة العمود والتربة، يكون إجهاد التحميل:

$$\sigma = -\frac{(P+W)}{A_f}$$

حيث W وزن القاعدة وأي ردم إضافي، و A_f مساحة مقطع القاعدة.

مـثـــال ٧ – ٥:

يتعرّض عمـود قصير من الطوب الأحمر المصمت، مقطعه مستطيل الشكل 20cm×40cm ، إلى حمل مركزي محوري قدره 80 kN . احسب الإجهاد المحوري في العمود.

الـحـل:

مساحة مقطع العمود: $A = 20\times40 = 800\ cm^2$

إجهاد الضغط الذي يتعرّض له العمود :

$$\sigma = \frac{80}{800} = 0.1kN/cm^2 = 100N/cm^2 = 1N/mm^2 = 1MPa$$

٧- ٢ – ٣ – العلاقة بين الإجـهاد والانـفـعال المحوري:

تتجاوب المواد المختلفة مع الأحمال المؤثّـرة عليها بدرجات متفاوتـة. ويتوقّف هذا التجاوب على الخواص الطبيعيّة للمادّة نفسها، ويمثّل هذا التجاوب عادة بالعلاقة التي تربط بين الأحمال والتشوّهات (deformations) الناجمة عنها، أو بين الإجهادات والانفعالات المناظرة. وعموما تتحدّد هذه العلاقة من إختبارات تجرى في المعمل على عيّنات (samples) من المادّة. كما أنّه في بعض الأحيان تكون هذه العلاقة معروفة ومضمونة من قبل المصنّع الذي ينتج المادّة كما هو الحال بالنسبة لقضبان حديد التسليح.

تـختلف العلاقـة بين الإجهاد والانفعال باختلاف المـادّة. ومن الناحية الرياضيّة يمكن التعبير عن الإجهاد المحوري كدالّـة للانفعال كما يلي:

$$\sigma = f(\varepsilon) \qquad (٧/٤)$$

و يفضّل تمثيل هذه المعادلة بـيانيّا كما في الشكل (٧- ٧) والذي يبيّن منـحنى الإجـهاد والانفعال (stress-strain curve) لقضيب من الصلب الطري (mild steel) معرّض لشـدّ مركزي محوري.

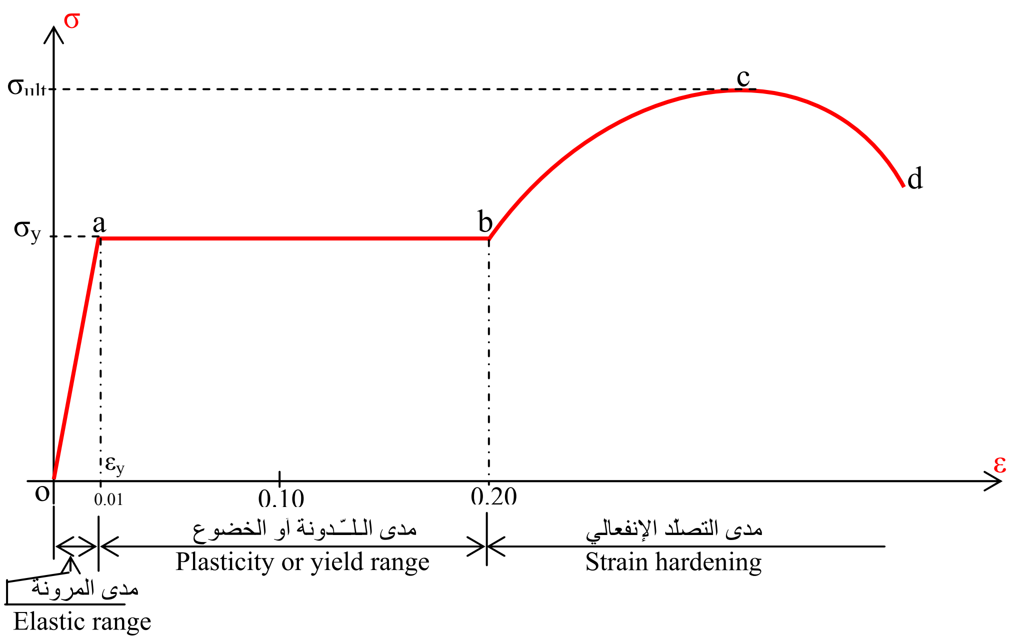
وبدراسة المنحنى الموضّح في الشكل (٧- ٦) يتبيّن ما يلي:

أ)- مـدى الـمرونـة [oa]:

من البداية وحتّى النقطة a يكون المنحني خـطا مستقيما. ويمكن فيه التعبير عن دالّة الإجهاد والانفعال بالعلاقة الخطّية التالية:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (٥/٧)$$

وهذه المعادلة تسمّى بقانون هــوك (Hook's law). ويسمّى ثابت التناسب والذي يرمز له دائما بالحرف E معاير المرونة (Modulus of elasticity) أو معاير يونج (Young's modulus). ويعتبر معاير المرونة مقياسا لمقاومة المادّة للتشوّه، ويستنتج من المعادلة (٥/٧) أنّ له نفس وحدات الإجهاد.



الشــكـل (٧ -٧) : نموذج لمنحنى الإجهاد والإنفعال لقضيب من الصلب الطري (mild steel) معرّضا لشــدّ مركزي محوري.

وخلال هذا المدى، يقال أنّ المادّة تسلك سلوكا متناسبا أو أنّها تتبع قانون هــوك، وتعرف النقطة a بحدّ التناسب (proportional limit). وإذا لم يتجاوز الإجهاد هذا الحدّ، يستعيد القضيب طوله الأصلي عند زوال القوّة المؤثّرة. ويقال عندئذ أن القضيب مرن (elastic). وتعرّف المرونة بأنّها خاصيّة المادّة التي تسمح لعضو باستعادة شكله الأصلي عند زوال القوّة المؤثّرة عليه.

ومن المعادلة (٥/٧) يظهر أنّ ميل الخط المستقيم [oa] هو معاير المرونة E وقيمته ثابتة تقريبا لجميع أنواع الصلب، وتفترض هذه القيمة في غالب الأحيان حوالي:

$$E = 20\times10^{10}\ N/m^2 = 200\ GPa$$

والجدول التالي يعطي قيمة معامل المرونة لبعض المواد:

نوع المادة	قيمة معامل المرونة E(GPa)
الحديد	١٩٠ - ٢١٠
الألمنيوم	٧٠ - ٧٩
النحاس	٩٦ - ١١٠
الخرسانة (في حالة الضغط)	١٤ - ٣١
الخشب	١١ - ١٣

ب)- مـدى الـلـدونـة **[ab]**:

تعتبر النقطة a نهاية حد المرونة ، ويرمز للإنفعال المناظر لها بالرمز ε_y . وبين النقطتين a و b يقال أنّ المادّة تخضع (yield). ويسمّى المدى [ab] بمدى الخضوع (yield range) أو مدى اللـدونة (plasticity range)، وتسمّى النقطة a بنقطة الخضوع (yield point) والإجهاد المناظر لها بإجهاد الخضوع σ_y (yield stress).

يستمرّ الانفعال في الزيادة بداية من النقطة a، دون زيادة في الإجهاد، حتّى النقطة b حيث يبلغ الانفعال المحوري حوالي ١٠ مرّات قيمته عند النقطة a. وخلال هذا المدى لا يرجع القضيب إلى طوله الأصلي عند إزالة الإجهاد. ويُقال عندئذ أنّ القضيب قد اكتسب تغيّرا في الطول غير مرن أو لدن أو أنّه تشوّه بشكل دائم.

ج)- مـدى الـتصلّـد الإنفعالي [bcd]:

مع تجاوز النقطة b ، يحدث ما يسمّى التصلّد الانفعالي (strain hardening) حين يبدأ الإجهاد في الزيادة مع زيادة الانفعال مرّة ثانية. وتستمرّ الزيادة في الإجهاد، ولكن بمعدّل أقل كثيرا عن نظيره في المدى المرن، حتّى يصل إلى أقصى قيمة له عند النقطة c ويسمّى عندئذ الإجهاد الأقصى (ultimate stress) للصلب الذي يرمز له بالرمز σ_{ult}. ولا يتوقّف الانفعال عند النقطة c ولكن يستمرّ مع هبوط تدريجي في الإجهاد حتّى يصل إلى النقطة d حيث يحدث الكسر في النهاية.

مـلاحظـة:

تعتمد الطريقة التقليديّة لتصميم المنشآت الخرسانيّة المسلّحة والتي تسمّى طريقة المرونة (elastic method) أو طريقة إجهادات التشغيل (working stress method) على سلوك منحني الإجهاد والإنفعال في منطقة المرونة. أمّا الطريقة الحديثة لتصميم المنشآت الخرسانيّة المسلّحة والتي تسمّى طريقة المقاومة القصوى (ultimate strength method) فهي تعتمد على سلوك منحني الإجهاد والانفعال في منطقة اللدونة.

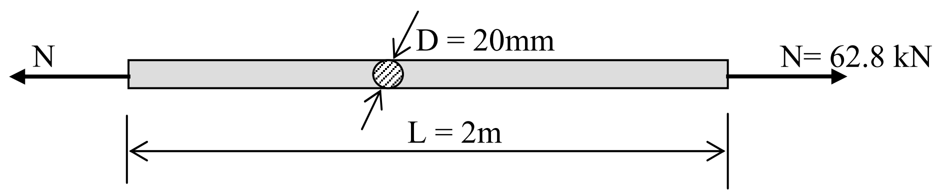
مـثــال ٧ – ٦ :

يتعرّض قضيب من الصلب الطري طوله 2m و قطره 20mm، إلى شـدّ محوري قدره N = 62.8 kN، كما هو مبيّن في الشكل (٧- ٨).

فإن كان إجهاد خضوع الصلب الطري يبلغ $25\ kN/cm^2$ ومعاير مرونته E = 200 GPa ، فأحسب:

١- الإجهاد المحوري الذي يتعرّض له القضيب.

٢- الإستطالة (elongation) الكلّية للقضيب.



شـكـــل (٧ – ٨)

الـــحـــل :

١ - مساحة مقطع القضيب A:

$$A = \pi D^2/4 = \pi(20)^2/4 = 314\ mm^2$$

وبالتالي فإنّ الإجهاد المحوري الذي يتعرّض له القضيب σ :

$$\sigma = N/A = 62.8/314 = 0.2\ kN/mm^2 = 20\ kN/cm^2$$

٢ - الإستطالة (elongation) الكلّية للقضيب dL :

$$\varepsilon = dL/L \rightarrow dL = \varepsilon \times L$$

$$\sigma = 20\ kN/cm^2 < \sigma_y = 25\ kN/cm^2$$

حيث أنّ الإجهاد لا يتعدّى إجهاد الخضوع،فمازال القضيب في المدى المرن الذي يمكن فيه تطبيق قانون هـوك:

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \varepsilon = \sigma/E$$

يجب أن تكون σ و E بنفس الوحدة:

$$E = 200\ GPa = 200\times10^9\ N/m^2 = 200\times10^6\ kN/m^2 = 2\times10^4\ kN/cm^2$$

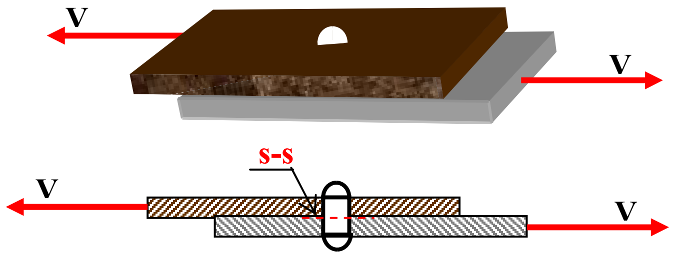
$$\varepsilon = 25/(2\times10^4) = 12.5\times10^{-4} = 1.25\times10^{-3} = 0.125\ \%$$

وبذلك تكون الإستطالة الكليّة:

$$dL = \varepsilon\times L = 1.25\times10^{-3}\times2 = 2.5\times10^{-3}\ m = 2.5\ mm$$

٧- ٢-٤-الإجهاد الناتج عن قوّة القصّ:

عند افتراض وجود وصلة تراكبيّة (lap joint) تتكوّن من لوحين من الصلب مربوطين بمسمار برشام (rivet)، ومعرّضة لقوّة V موازية لسطح تراكب اللوحين كما في شكل (٧- ٩). ومع افتراض عدم وجود أي احتكاك (friction) بين اللّوحين، فإنّ المساحة التي تقاوم القوّة V وتمنع انزلاق (sliding) اللّوحين على بعضهما هي مساحة مقطع المسمار A حيث تستحدث قوّة تساوي في المقدار وتضاد في الإتجاه القوّة V.



شـــكـــل (٧ – ٩)

وعند التخيّل أنّ المسمار قد فصل إلى جزأين على المستوى s-s فسيصبح اللّوحان ينزلقان أحدهما على الآخر. هذه القوّة المستحدثة هي في الواقع محصّلة الإجهادات التي تؤثّر عل مساحة مقطع المسمار وتسمّى إجهادات القصّ. وبفرض أنّ هذه الإجهادات موزّعة بانتظام على المقطع، فيكون متوسّط (average) إجهاد القصّ τ:

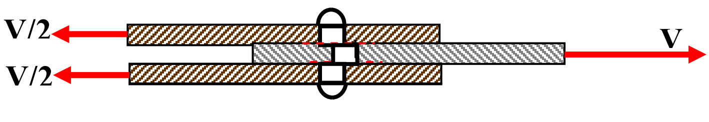
$$\tau = \frac{V}{A} \qquad (6/٧)$$

حيث V هي قوّة القصّ وA هي المساحة الموازية لقوّة القص (مقطع المسمار) والتي تقاوم أي انزلاق محتمل نتيجة القوّة المؤثّرة V .

يلاحظ في الوصلة المبيّنة في شكل (٧- ٩)، أنّه يوجد مستوى واحد لإحتمال قصّ المسمار، وبالتالي يقال إنّ المسمار في حالة قصّ مفرد (single shear).

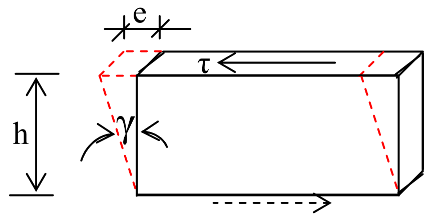
ويبيّن الشكل (٧- ١٠) نوعا آخرا من الوصلات كثيرة الإستعمال. حيث يوجد مستويان لإحتمال قصّ المسمار والمساحة التّي تقاوم القوّة V تساوي ضعف مساحة مقطع المسمار(2A). ولهذا السّبب يقال أنّ مثل هذا المسمار في حالة قصّ مزدوج (double shear). وتكون قيمة متوسّط إجهاد القصّ في هذه الحالة:

$$\tau = \frac{V}{2A}$$



شـــكـــل (٧ – ١٠)

تتسبّب إجهادات القصّ في انفعال القصّ (shear strain). فعند وجود كتلة مستطيلة معرّضة لإجهادات قصّ τ في مستوى واحد، فإنها تحوّل الوجه المستطيل للكتلة إلى متوازي أضلاع كما يظهر بالخطوط المتقطّعة في شكل (٧- ١١).



شكل (٧ – ١١)

ويقاس انفعال القصّ بمقدار التغيّر في الزاوية القائمة عند الرأس مقاسا بالزوايا نصف القطريّة (radians)، ويرمز لانفعال القصّ غالبا بالحرف γ (جاما):

$$\gamma \approx \tan\gamma = e/h \qquad (٧/٧)$$

وبما أنّ هذا الإنفعال يمثّل زاوية فهو عديم الأبعاد.

ويتناسب انفعال القصّ γ مع إجهاد القصّ τ تناسبا مباشرا مادام الإجهاد لا يتجاوز حدّا معيّنا يختلف باختلاف الموادّ. وكما هو الحال بالنسبة للإجهاد والإنفعال المحوري، يمكن التعبير عن هذه العلاقة الخطّية كما يلي:

$$\tau = G\gamma \qquad (٨/٧)$$

حيث (G) معاير القصّ وله مثل معاير المرونة نفس وحدات الإجهاد.

إن قيمة معامل القصّ G لمعظم المواد تساوي حوالي 40% من قيمة معامل المرونة E .ويمكن التعبير عن معاير القصّ بدلالة معاير المرونة بالعلاقة التالية:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad (٩/٧)$$

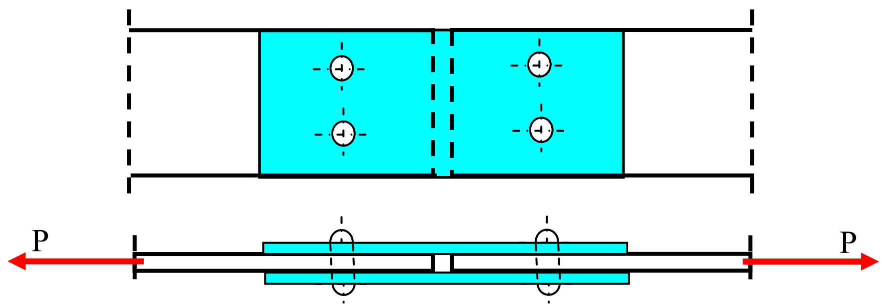
حيث μ نسبة بواسون (Poisson's ratio) : وهي النسبة بين الانفعال العرضي إلى الانفعال الطولي عندما يؤثّر على المادّة إجهاد ضغط أو شدّ.

والجدول التالي يعطي نسبة بواسون وقيمة معامل القصّ لبعض أنواع الموادّ:

نوع المادّة	نسبة بواسون μ	قيمة معامل القصّ G(GPa)
الحديد	0.28	80 - 75
الألمنيوم	0.33	30 - 26
النحاس	0.34	41 - 36

مثال ٧ – ٧ :

الوصلة المبرشمة المبيّنة في شكل (٧- ١٢) واقعة تحت تأثير القوّة $P = 50kN$. فإذا كان قطر مسمار البرشام المستخدم يساوي $d = 8$ mm ، فأحسب متوسّط إجهاد القصّ في المسامير الناتج عن القوّة P .



شكل (٧ – ١٢

الحل:

عدد المسامير التي تقاوم القوّة P هي اثنان وليس أربعة كما قد يضنّ البعض. وحيث أنّ كل مسمار في حالة قصّ مزدوج، فتكون المساحة الكليّة التّي تقاوم القصّ هي ضعف مساحة مقطع مسمارين، أي:

$$A = 2\times2(\pi d^2/4) = 201 \text{ mm}^2$$

وبالتالي، يكون متوسّط إجهاد القصّ في المسامير :

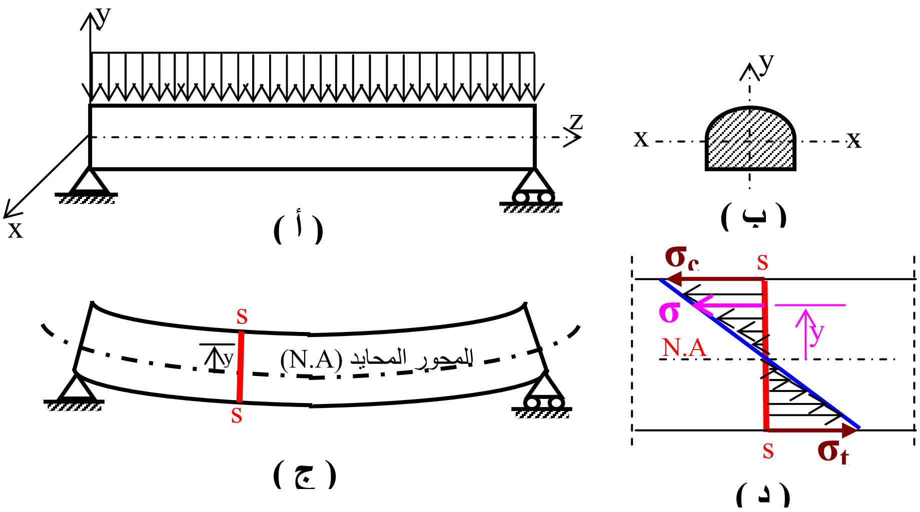
$$\tau = P/A = 50/201 = 0.249 \text{ kN/mm}^2 = 249 \text{ N/mm}^2$$

٧- ٢ – ٥ – الإجهادات الناتجة عن عزوم الانحناء:

لدراسة الإجهادات الناتجة عن عزوم الانحناء، يجب دراسة التشوّهات (deformations) الناجمة عن تأثير عزم الانحناء. وفي هذا المجال سيفترض ما يلي:

- أنّ إجهاد المادّة لا يتجاوز حدّ التناسب لهذه المادّة،
- يُهمل تأثير قوى القصّ المصاحبة لعزوم الانحناء.

فعلى سبيل المثال: كمرة مستوية، منتظمة المقطع ولها مستوى تماثل طولي (yz)، واقعة تحت تأثير حمل موزّع بانتظام كما في الشكل (٧- ١٣- أ).



شـكـل (٧ – ١٣)

نتيجة تأثير الأحمال، تبدأ الكمرة في الانحناء كما في الشكل (٧- ١٣- ج). وعند التخيّل أنّ الكمرة تتكوّن من ألياف (fibers) طوليّة، فإنّ الألياف العلويّة ستتقاصر قليلا بينما الألياف السفليّة ستتمدّد قليلا، وما بينهما توجد ليفة لا تتقاصر ولا تتمدّد وتسمّى المستوى المحايد (neutral plane). وخط تقاطع المستوى المحايد ومستوى المقطع (المستوى xy) يسمّى المحور المحايد (Neutral Axis).

تبيّن دراسة التشوّهات أنّ تقويس الكمرة يتناسب تناسبا طرديّا مع عزم الانحناء، وأنّ ثابت التناسب هو حاصل ضرب معاير مرونة المادّة (E) وعزم القصور الذاتي (I_x) لمساحة مقطع الكمرة حول محور الانحناء: EI_x. ويسمّى هذا المقدار صلادة انحناء الكمرة (bending rigidity).

كما تؤكّد دراسة التشوّهات أنّ الإجهادات الناتجة عن عزم الانحناء تتناسب تناسبا طرديّا مع البعد عن المحور المحايد (y). كما تبيّن الدراسة أيضا أنّ إجهاد عزم الإنحناء عند أي ليفة (fiber) من مقطع تبعد مسافة y عن المحور المحايد، تقدّر بالمعادلة التالية:

$$\sigma = \frac{M.y}{I_x} \qquad (١٠/٧)$$

حيث :

M : عزم الانحناء عند المقطع،

y : هي المسافة بين المحور المحايد واللّيفة (أو النقطة) المراد حساب إجهاد الانحناء فيها.

I_x : عزم القصور الذاتي (moment of Inertia) لمساحة المقطع حول محورالإنحناء.

وتؤكّد المعادلة (١٠/٧) أنّ إجهاد عزم الانحناء، عند مقطع محدّد s ، يتغيّر خطّيا من صفر عند المحور المركزي إلى أقصى قيمتين (واحدة إجهاد شدّ σ_t والأخرى إجهاد ضغط σ_c) عند أبعد ليفتين ($y = y_{max}$) على جانبي المحور المحايد، كما في الشكل (٧- ١٣ – د):

$$\sigma_{max,s} = \frac{M_s . y_{max}}{I_x} \qquad (١١/٧)$$

حيث M_s: عزم الانحناء عند المقطع المحدّد s.

وتؤكّد المعادلة (١١/٧)، أنّ أقصى إجهاد عزم انحناء الذي تتعرّض له الكمرة (σ_{max}) يكون عند أبعد جانبي المقطع y_{max} الذي يكون فيه أقصى عزم إنحناء (M_{max}):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} . y_{max}}{I_x} \qquad (١٢/٧)$$

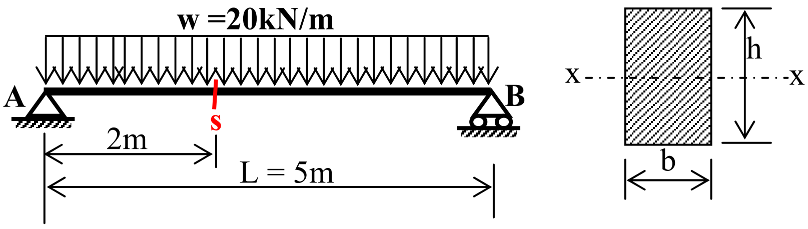
وفي معظم المسائل العمليّة المتعلّقة بتحليل وتصميم المنشآت، تكون الإجهادات القصوى محلّ الإهتمام الأوّل.

مـثـــال ٧ – ٨ :

تتعرّض كمرة بسيطة طول بحرها 5m إلى حمل موزّع بانتظام قدره 20kN/m . فإذا كان مقطع الكمرة مستطيل الشكل عرضه b = 20cm وارتفاعه h= 50cm، كما يظهر في الشكل (٧-١٤)، فاحسب:

١- أقصى إجهاد عزم انحناء تتعرّض له الكمرة عند المقطع S .

٢- وحدّد موقع أقصى إجهاد عزم انحناء تتعرّض له الكمرة.



شـكــل (٧ – ١٤)

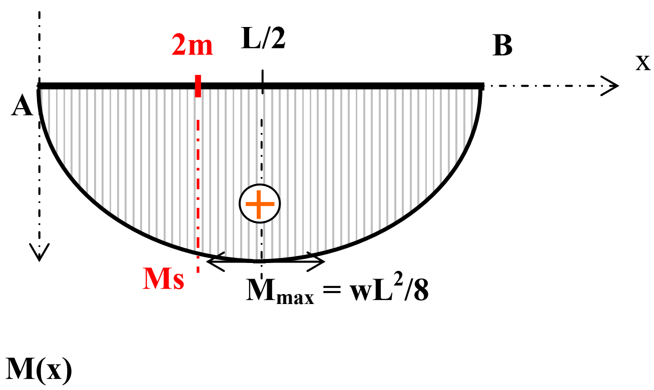
الحل:

١- مركّبات ردود أفعال الركائز:

$$A_y = B_y = wL/2 = 50 \text{ kN}، \qquad A_x = 0$$

- عزم الانحناء عند المقطع S :

$$M_s = A_y \times 2 - w \times 2 \times 1 = 100 - 40 = 60 \text{ kN.m}$$



شـكــل (٧- ١٥)

- عزم القصور الذاتي للمقطع حول المحور x :

$$I_x = bh^3/12$$

إن الإجهاد الأقصى عند المقطع يكون عند أبعد ليفتين من مركزه، وبما أنّ المقطع متماثل:

$$y_{max} = \pm h/2$$

وبالتالي، اقصى إجهاد تتعرّض له الكمرة عند المقطع s هو:

$$\sigma_{\max,s} = \pm \frac{M_s \times \frac{h}{2}}{I_x} = \pm \frac{M_s \times \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}}$$

$$\sigma_{\max,s} = \pm \frac{6M_s}{bh^2}$$

$$\sigma_{\max,s} = \pm \frac{6 \times 60}{20 \times 40^2} = \pm 0.01125 \ \frac{kN}{cm^2} = \pm 112.5 \frac{kN}{m^2} = \pm 112.5 KPa \ .$$

وتوضّح الإشارة الموجبة إجهاد الشدّ σ_t وهي عند أسفل ليفة في المقطع s، وبينما الإشارة السالبة لإجهاد الضغط σ_c وهي عند أعلى ليفة في المقطع s.

٢- عزم الإنحناء الأقصى الذي تتعرّض له الكمرة يكون عند منتصف بحر الكمرة كما في شكل (٧- ١٥)، ومقداره:

$$M_{max} = M(L/2) = wL^2/8 = 20 \times 25/8 = 62.5 \text{ kN.m}$$

وبالتالي يكون أقصى إجهاد عزم انحناء تتعرّض له الكمرة يكون عند الألياف الخارجيّة لمقطع منتصف بحر الكمرة ($y_{max} = \pm h/2$) وقيمته:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{6M_{\max}}{bh^2}$$

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{6 \times 62.5}{20 \times 40^2} = \pm 0.011172 kN / cm^2 = \pm 117.2 KPa$$

وتوضّح الإشارة الموجبة لإجهاد الشدّ σ_t وهي عند أسفل ليفة في مقطع منتصف بحر الكمرة، بينماالإشارة السالبة لإجهاد الضغط σ_c وهي عند أعلى ليفة في نفس المقطع.

٧-٣- تمـــارين:

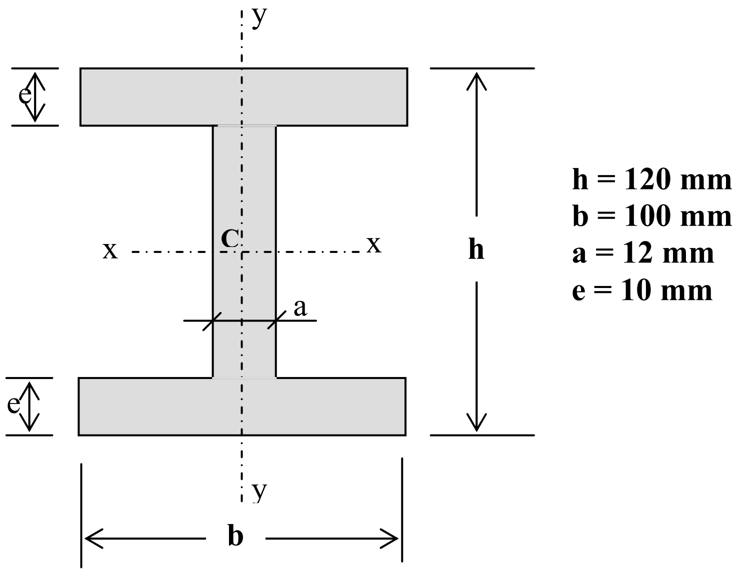
ت ٧-١:

باعتبار تعبيرات عزم القصور الذاتي للمقطع المستطيل، احسب عزم القصور الذّاتي لمساحة المقطع المبيّن في الشكل (ت٧- ١):

١- حول المحور المركزي الأفقي x- x .

٢- حول المحور المركزي الرأسي y-y.

[الجواب: $I_x = 706.67\ cm^4$, $I_y = 168.11\ cm^4$]



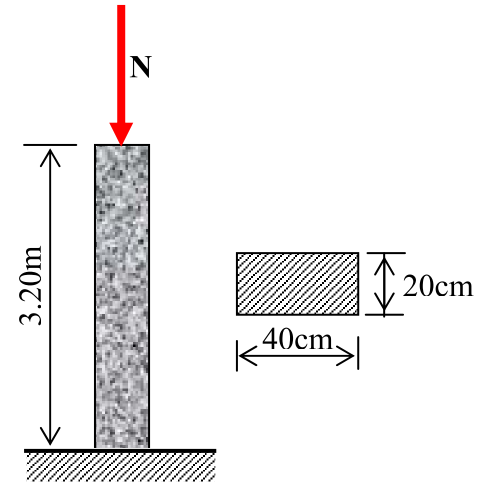
شـكـل (ت ٧- ١)

ت ٧-٢ :

يتعرّض عـمود (column) من الخرسانة إلى حمل مركزي محوري قدره N = 720 kN كما هو مبيّن في الشكل (ت٧- ٢). طول العـمود 3.20m و مقطعه مستطيل الشكل 20cm ×40cm، وبافتراض أنّ إجهاد خضوع الخرسانة المستخدمة في العمود يبلغ $1000 N/cm^2$، ومعاير مرونته E = 14 GPa ، عليه:

١- احسب الإجهاد المحوري الذي يتعرّض له الـعمود.

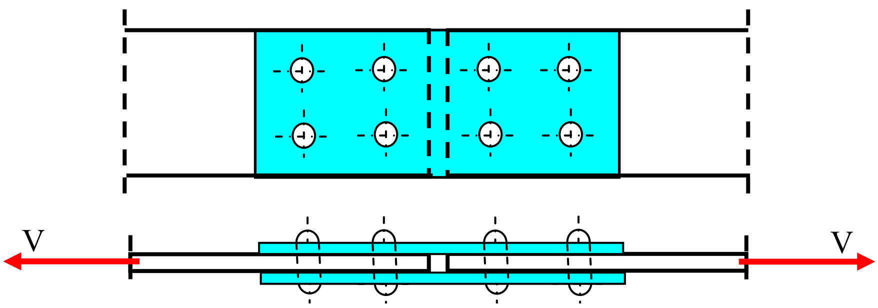
٢- احسب مقدار تقاصر العمود (shortening) تحت تأثير الحمل.



شكل (ت ٧ – ٢)

ت ٧–٣ :

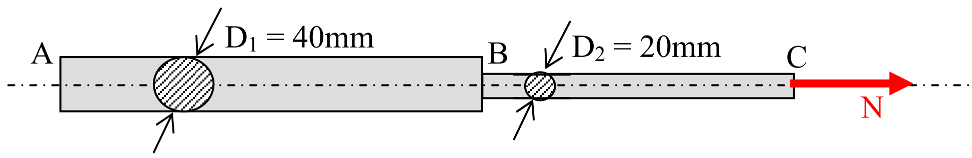
الوصلة المبرشمة المبيّنة في شكل (ت٧- ٣) واقعة تحت تأثير القوّة $V = 120kN$. فإذا كان قطر مسمار البرشام المستخدم يساوي $d = 1.2$ cm، أحسب متوسّط إجهاد القصّ في المسامير الناتج عن القوّة V .



شكل (ت ٧ – ٣)

ت ٧- ٤ :

القضيب ABC له قطرين مختلفين في جزأين مختلفتين كما هو مبين في الشكل (ت٧- ٤) واقع تحت تأثير قوة شد N ، والجزء AB قطره $D_1 = 40mm$ والجزء BC قطره $D_2 = 20mm$.
إذا كان الإجهاد المحوري في الجزء AB يساوي 50 MPa، فما هو الإجهاد المحوري σ في الجزء BC ؟



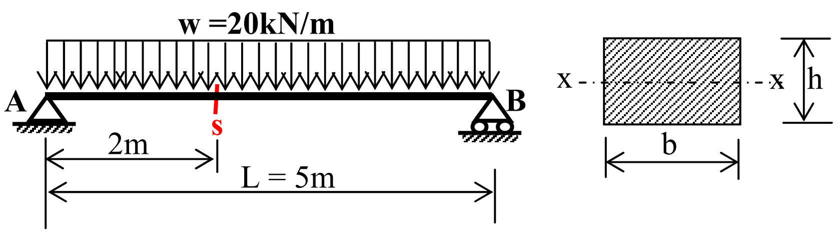
شكل (ت٧- ٤)

ت ٧ – ٥ :

تتعرّض كمرة بسيطة طول بحرها 5m إلى حمل موزّع بانتظام قدره 20kN/m . فعندما يكون مقطع الكمرة مستطيل الشكل عرضه b = 50cm وارتفاعه h = 20cm ، كما يظهر في الشكل (ت٧-٥).

١- احسب أقصى إجهاد عزم انحناء تتعرّض له الكمرة عند المقطع s .

٢- احسب وحدّد موقع أقصى إجهاد عزم إنحناء تتعرّض له الكمرة.



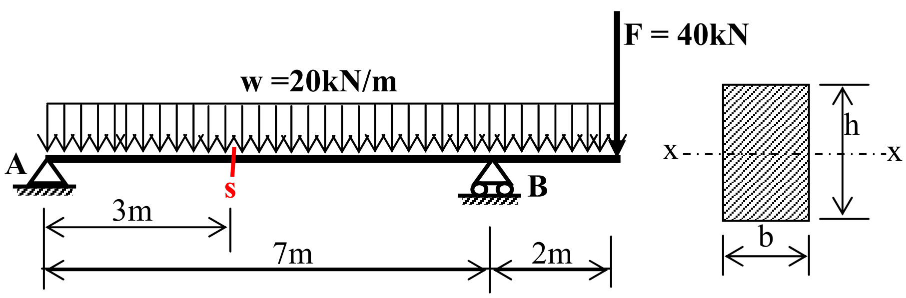
شـكـــل (ت٧ – ٥)

ت ٧ – ٦ :

تتعرّض كمرة بسيطة ذات مقطع مستطيل الشكل، عرضه b = 20cm وارتفاعه h = 70cm، لمجموعة من الأحمال كما يظهر في الشكل (ت٧- ٦).

١ - احسب قيمة إجهاد عزم الإنحناء في المقطع s الذي يبعد 3m عن الركيزة A وعند المستوى b-b من المقطع.

٢ - احسب وارسم تخطيط توزيع اجهادات الانحناء على المقطع s.



شـكـــل (ت٧ – ٦)

ت ٧ – ٧ :

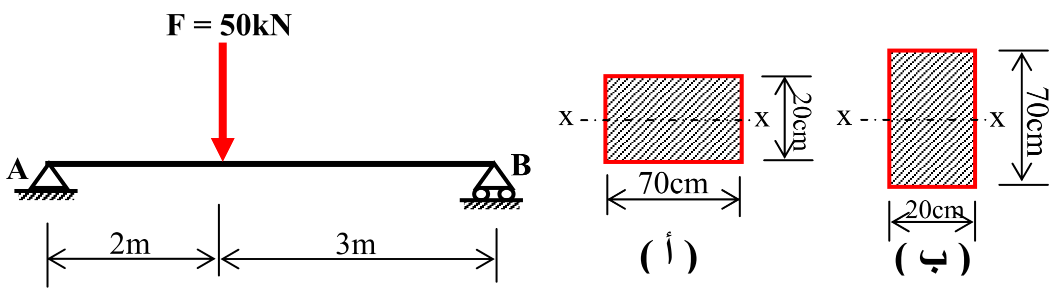
تتعرّض كمرة بسيطة ذات مقطع مستطيل الشكل إلى حمل مركّز $P = 50\ kN$ كما هو مبيّن على الشكل (ت٧- ٧).

١- احسب أقصى إجهاد عزم انحناء تتعرّض له الكمرة إذا كان شكل مقطعها كما في الوضع المبيّن في الشكل (ت٧- ٧ – أ).

٢- احسب أقصى إجهاد عزم انحناء تتعرّض له الكمرة إذا كان شكل مقطعها كما في الوضع المبيّن في الشكل (ت٧- ٧ – ب).

٣- بيّن أيّ الوضعين أفضل من الناحية الإنشائيّة.

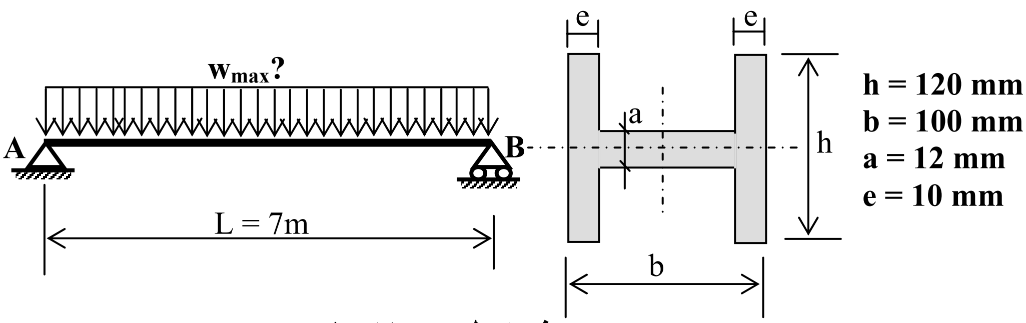
[الجواب: ١) $\sigma_{max} = \pm\ 2.57\ kN/cm^2$ ، ٢) $\sigma_{max} = \pm\ 0.367\ kN/cm^2$ ، ٣) الوضع (ب) أفضل]



شـكــل (ت٧ – ٧)

ت ٧ – ٨:

طول بحر الكمرة البسيطة المبيّنة في الشكل (ت٧- ٨) $L = 7m$ ، ومقطعها متماثل في شكل حرف H. إذا كان أقصى إجهاد عـــزم انحناء مسمـــوح به للكمرة $\sigma_{max} = 120MPa$ ، أحسب قيمة أقصى الحمل الموزّع بانتظام (w_{max}) الذي يمكن أن تتحمّله الكمرة.



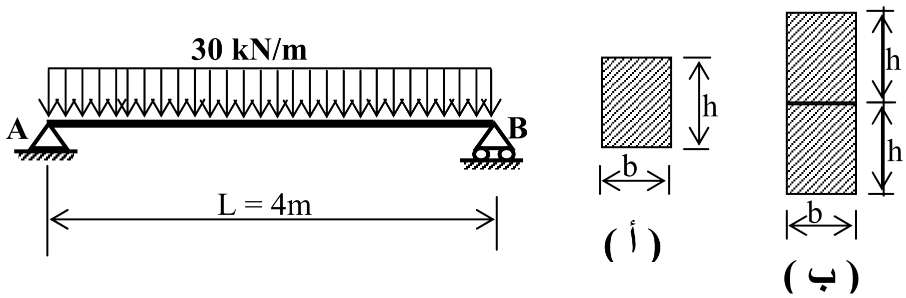
شـكـل (ت ٧ـ ٨)

ت ٧ – ٩:

تتعرّض كمرة بسيطة طولها 4m إلى حمل موزّع بانتظام قدره 30kN/m ، فإذا كان مقطع الكمرة مستطيل الشكل عرضه b = 20cm وارتفاعه h = 35cm ، كما يظهر في الشكل (٧- ٩- أ).

١ – احسب أقصى إجهاد عـــزم انحناء تتعرّض له الكمرة.

٢ – إذا وضعت كمرتين من نفس المقطع السابق، الواحدة فوق الأخرى كما في الشكل (٧- ٩- ب) وربطت إحداهما بالأخرى ليكوّنا كمرة واحدة (كمرة مركّبة)، فاحسب أقصى قيمة للحمل الموزّع (W_{max}) الذي يمكن أن تتحمّله الكمرة المركّبة بدون أن يتجاوز أقصى إجهاد عزم الانحناء نظيره في الكمرة البسيطة.



شـكـل (ت ٧ـ ٩)

ت ٧ – ١٠:

تتعرّض كمرة من الحديد، مقطعها شكله حرف I، لحمل مركّز $P = 50kN$ زيادة على وزنها الذاتي (w_b) الموزّع بانتظام كما هو مبيّن في شكل (ت ٧- ١٠).

فإذا كان مقدار كثافة الحديد المصنوع منه الكمرة $\gamma_s = 78kN/m^3$ ، فالمطلوب حساب القيمة القصوى لإجهاد عزم الانحناء التي تتعرّض لها الكمرة في الحالات التالية:

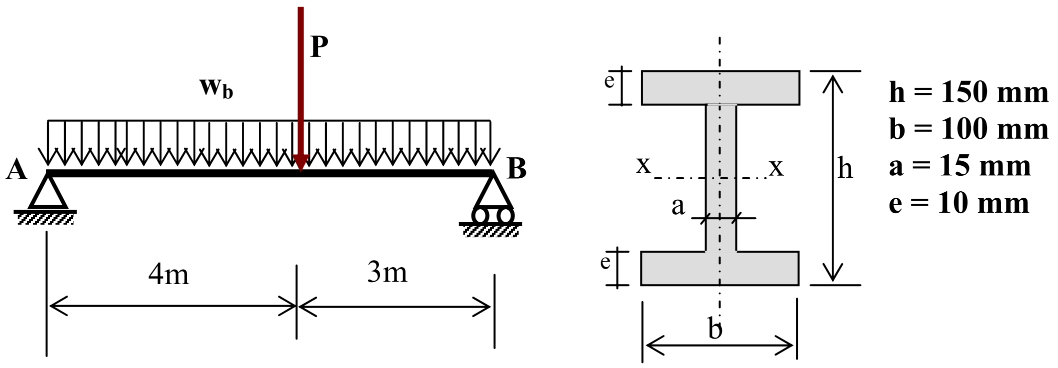
١- تأثير الحمل المركّز بدون تأثير الوزن الذاتي للكمرة (w_b).

٢- تأثير وزن الكمرة الذاتي بدون تأثير الحمل المركّز P .

٣- تأثير الحمل المركّز P مع تأثير الوزن الذاتي للكمرة (w_b).

٤- هل تأثير الحملين في آن واحد يساوي مجموع تأثيرات كلّ حمل على حده؟

ملاحظة: هذه الطريقة توضّح مبدأ التجميع (principle of superposition).



شـكـل (ت ٧- ١٠)

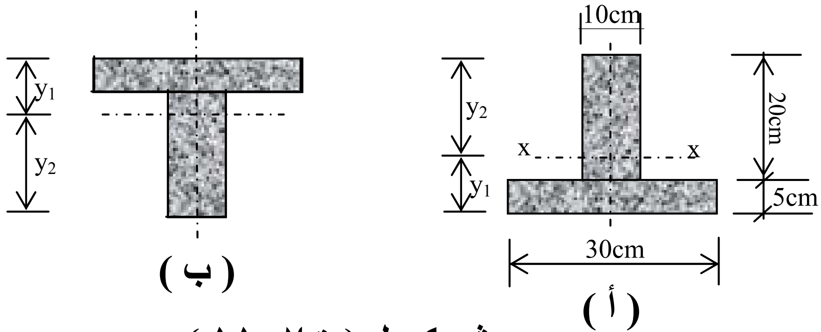
ت ٧ – ١١:

١- احسب عزم الانحناء المسموح به لمقطع T المبيّن في شكل (ت٧- ١١- أ) إذا علمت أنّه مصنوع من الخرسانة وأنّ قيمة إجهاد الشدّ (σ_t) والضّغط (σ_c) المسموح بهما لهذه المادّة هما:

$$\sigma_t = 0.1kN/cm^2 \text{، } \sigma_c = 1.2kN/cm^2$$

٢- كم سيكون عزم الانحناء المسموح به إذا قلب المقطع رأسا على عقب كما هو مبيّن في شكل (ت ٧- ١١- ب)؟

٣- بيّن أيّ الوضعين أفضل من الناحية الإنشائيّة؟



شـــكـــل (ت٧- ١١)

سنغافورة: عدد السكان حوالي ٤ مليون.

تعتبر سنغافورة من أنظف وأدق المدن في العالم - وكأنها مثالا معماريّا حيّا -

ارتفاع المباني في سنغافورة لا يتعدى 280 مترا بسبب حركة الطائرات.